

Formfaktor und Massendifferenz des Pions

Dan Baruth

1975

Formfaktor und Massendifferenz des Pions

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

des

Fachbereiches Physik

der

Ludwig - Maximilians - Universität

München

vorgelegt von

Dan Baruth

aus Haifa

24. Juli 1975



1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Salecker

2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Süßmann

Tag der mündlichen Prüfung: 9. 12. 1975

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Überblick	1
Einleitung	2
1. Definition und Bedeutung des Pion-Formfaktors	7
2. Die analytischen Eigenschaften von F_{π}	12
A) Dispersionsbeziehungen für $F_{\pi}(t)$	12
B) Das Omnès-Integral für $F_{\pi}(t)$	15
3. Die Beziehung zwischen der $\pi\pi$ -Streu- phase $\delta_{11}(t)$ und der Formfaktorphase $\delta(t)$	18
4. Experimentelle Bestimmung von F_{π}	20
A) $F_{\pi}(t)$ im Streubereich	20
B) $F_{\pi}(t)$ im Erzeugungsbereich	23
C) Die FF-Phase $\delta(t)$	24
5. Die Massendifferenz als Parameter für den FF	25
6. Nicht-elektromagnetische Beiträge zur Pion-Massendifferenz	30
A) Baryonische Beiträge zur Pion- Massendifferenz	32
B) Strahlungskorrekturen zu den baryonischen Beiträgen	41
C) Der π^0 - η Übergang	47

6.		Seite
	D) Schwere Zwischenzustände bei der Pion-Selbstenergie (SE)	49
	E) Der Beitrag aus dem $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ - Zerfall	54
	F) Diskussion der nicht-elektromagnetischen Beiträge	56
7.	Die Pion-Massendifferenz als Hochenergieeffekt	57
8.	Formfaktormodelle	64
	A) Das Schnittmodell (SM)	64
	B) Das Resonanzenmodell (RM)	67
9.	Bestimmung des RM-s durch die experimentellen Meßdaten	72
	A) Das RM und $ F_\pi(t) $ im zeitartigen Bereich $t > 0$	72
	B) Das RM und die Phase $\delta_{11}(t)$	74
	C) Das RM im raumartigen Bereich $t < 0$	79
10.	Bestimmung des SM-s durch die Meßdaten	82
	A) Das SM im raumartigen Bereich $t < 0$	82
	B) Das SM mit Breite als Pauschalierung von $\pi\pi$ -Resonanzen	86
11.	Die FF-Modelle und die Pion-Massendifferenz	89
	A) Das SM und die Massendifferenz	89

11.	Seite
B) Das RM und die Massendifferenz	96
C) Die Massendifferenz und das asymptotische Verhalten des FF-s	102
12. Zusammenfassung	107
Literaturverzeichnis	110



Digitized by the Internet Archive
in 2026

ÜBERBLICK

Die gegenwärtigen Meßdaten für den Pion-Formfaktor im Streu- und Erzeugungsbereich, sowie für die $\pi\pi$ -Streuphase δ_{11} liefern übereinstimmend ein Pion-Formfaktormodell

$$F_{\pi}^R(t) = \sum_{j=1}^3 \frac{A_j \left(1 + \frac{2m_{\pi}\Gamma_j}{m_j^2}\right)}{1 - \frac{t}{m_j^2} - i \frac{\Gamma_j}{m_j^2} \sqrt{t - 4m_{\pi}^2}}$$

mit den Parametern

$$\begin{array}{lll} m_1 = 0.775 \text{ GeV} & \Gamma_1 = 0.150 \text{ GeV} & A_1 = 0.96 \\ m_2 = 0.950 \text{ GeV} & \Gamma_2 = 0.150 \text{ GeV} & A_2 = 0.033 \\ m_3 = 1.680 \text{ GeV} & \Gamma_3 = 0.095 \text{ GeV} & A_3 = 0.007 \end{array} .$$

Dieser Formfaktor ergibt auch die richtige elektromagnetische Pion-Massendifferenz $\delta_{\text{em}} = 4.5 \pm 0.12 \text{ MeV}$, die sich aus dem gesamten gemessenen Wert abzüglich der nicht-elektromagnetischen Anteile abschätzen läßt.

EINLEITUNG

Eine Theorie, mit welcher die Strukturfunktionen bzw. die Formfaktoren (FF-n) der verschiedenen Elementarteilchen genau bestimmt werden können, existiert z.Z. noch nicht. Daher müssen Modellfunktionen als Formfaktoren verwendet werden.

Unter den Elementarteilchen ist das Pion das einfachste, welches stark wechselwirkt. Daher ist es als Schlüsselteilchen zum Verständnis dieser Wechselwirkung anzusehen, und die Kenntnis seines Formfaktors ist besonders wichtig.

Die bisher aufgestellten bzw. errechneten Formfaktormodelle des Pions geben die experimentell gewonnenen Daten gar nicht oder nur teilweise wieder.

In der vorliegenden Arbeit werden Formfaktormodelle bestimmt, die alle vorhandenen Meßdaten berücksichtigen. Dabei werden die gut fundierten theoretischen Prinzipien, wie die relativistische Invarianz, die Eichinvarianz, Kausalität, Unitarität und die Kreuzungsbeziehungen sowie die Gültigkeit von Dispersionsbeziehungen besonders beachtet (Abschnitte 1,2 u. 3).

Die Meßdaten des Pionformfaktors F_π und der $\pi\pi$ -Streu-
phase δ_{11} , die direkt mit der Formfaktorphase in Zusammenhang stehen (Abschnitt 3), reichen zur Bestimmung von $F_\pi(t)$ nicht aus, da sie nur für relativ kleine Energie-Impulsübertragungen t gewonnen werden konnten (Abschnitt 4). Diese Schwierigkeit wird durch Hinzunahme der Pionmassendifferenz überwunden.

Der elektromagnetische Massenunterschied zwischen den geladenen und dem neutralen Pion läßt sich nämlich durch ein Integral darstellen, das F_π im Streubereich

enthält (Abschnitt 5). Dieser Anteil der gesamten, experimentell genau bestimmten ($\delta_{m_{\text{exp}}} = 4.6041 \text{ MeV}$) pionischen Massendifferenz kann bei Kenntnis der nicht-elektromagnetischen Anteile ausgerechnet werden.

Eine Abschätzung der nicht-elektromagnetischen Anteile, die vorwiegend hadronischer Natur sind, welche unter Verwendung der SU3-Invarianz der starken Wechselwirkung im einzelnen abgeschätzt worden sind, liefern insgesamt $\delta_{m_{\text{had}}} = 0.1 \pm 0.12 \text{ MeV}$ (Abschnitt 6).

Der elektromagnetische Anteil zur Massendifferenz $\delta_{m_{\text{em}}} = 4.5 \pm 0.12 \text{ MeV}$, der eine Integralgleichung für F_{π} liefert, ist bei hohen Energie-Impulsübertragungen empfindlich vom Formfaktor abhängig und gestattet deshalb Aussagen über den asymptotischen Bereich $t \rightarrow \infty$ (Abschnitt 7).

Da F_{π} noch nicht bekannt ist, befaßt sich die Arbeit mit der Aufgabe, für den Formfaktor rein phänomenologische, möglichst einfache Modellfunktionen mit den notwendigen analytischen Eigenschaften zu finden, welche mit den experimentellen Daten übereinstimmen (Abschnitt 8). Diese werden unter Verwendung der Meßdaten aufgestellt (Abschnitte 9 u. 10) und durch die Massendifferenz endgültig bestimmt (Abschnitte 11A u. 11B).

Die aus den vorliegenden Analysen gewonnenen Formfaktormodelle, die F_{π} in guter Übereinstimmung mit allen vorhandenen Meßdaten wiedergeben, sind folgendermaßen:

Die erste Modellfunktion, das "Resonanzen-Modell" (RM), hat die Form

$$F_{\pi}^R(t) = \sum_{j=1}^3 \frac{A_j \left(1 + \frac{2m_{\pi}\Gamma_j}{m_j^2}\right)}{1 - \frac{t}{m_j^2} - i \frac{\Gamma_j}{m_j^2} \sqrt{t - 4m_{\pi}^2}}$$

und die Parameter

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.775 \text{ GeV} & \Gamma_1 &= 0.150 \text{ GeV} & A_1 &= 0.96 \\ m_2 &= 0.950 \text{ GeV} & \Gamma_2 &= 0.150 \text{ GeV} & A_2 &= 0.033 \\ m_3 &= 1.680 \text{ GeV} & \Gamma_3 &= 0.095 \text{ GeV} & A_3 &= 0.007 \end{aligned} .$$

Die Terme dieser Funktion beschreiben den Einfluß von drei Resonanzen auf den Formfaktor (deshalb auch die Bezeichnung Resonanzen-Modell).

Der erste und dritte Term berücksichtigen die ρ -Resonanz bei $m_1 = m_{\rho}$ und die ρ' -Resonanz bei $m_3 = m_{\rho'}$. Der zweite Term dagegen bezeichnet nicht eine bekannte Resonanz bei $m_2 = 0.95 \text{ GeV}$, sondern mußte zur Anpassung der Modellfunktion an die Daten eingeführt werden. Die Messung einer solchen Resonanz ist äußerst schwierig, da sie von der ρ -Resonanz überdeckt wird.

Die zweite Modellfunktion, das "Schnitt-Modell" mit Resonanzbreite (SMMB), hat die Form

$$F_{\pi}^{SB}(t) = \left[\frac{1 + \frac{2m_{\pi}\Gamma}{\Lambda^2}}{1 - \frac{t}{\Lambda^2} - i \frac{\Gamma}{\Lambda^2} \sqrt{t - 4m_{\pi}^2}} \right]^{\gamma}$$

mit den Parametern

$$\nu = 0.96 \quad \Lambda = m_\rho = 0.773 \text{ GeV} \quad \Gamma = \Gamma_\rho = 0.14 \text{ GeV} .$$

Diese Funktion berücksichtigt explizit nur die ρ -Resonanz, allerdings nicht durch einen Pol, sondern eine Quelle eines Verzweigungsschnittes. Der nahe bei 1 liegende Exponent ν bewirkt, daß für $t \rightarrow \infty$ die Phase von $F_\pi^{\text{SB}}(t)$ gegen $\sqrt{t}$ geht, also unterhalb π bleibt. Da höhere Resonanzen in ihrem Breitenbereich die Phase herunterdrücken, kann man von dieser Schnittmodellfunktion sagen, sie berücksichtige pauschal alle sich ins Unendliche erstreckende höhere Resonanzen.

Zur weiteren Prüfung wurden die Modellfunktionen mit den neuesten Streumessungen von Serpukhov²⁵ (Fig. 9.3 und 10.2) und der von ihnen gelieferte rms-Radius mit dem zuletzt angegebenen experimentellen Wert³²

$r_\pi = 0.71 \pm 0.05 \text{ fm}$ verglichen.

Beide obenangegebenen Funktionen stimmen mit den Serpukhov-Meßdaten gut überein. Das RM liefert einen rms-Radius von

$$r_\pi^{\text{R}} = 0.674 \text{ fm} ,$$

also in guter Übereinstimmung mit dem von Ref. 32 angegebenen Wert.

Das SMmB liefert den etwas kleineren Wert

$$r_\pi^{\text{SB}} = 0.65 \text{ fm} ,$$

der auch als verträglich mit dem experimentellen Wert gelten kann.

Bei der Analyse der Asymptotik des Formfaktors wurde schließlich gezeigt (Abschnitt 11C), daß um den FF in allen Energie-Impulsbereichen zu kennen, er nicht in allen Bereichen gemessen werden muß. Dazu wurde ein weiteres, modifiziertes SM konstruiert, das nur endlich viele Resonanzen pauschaliert und von einer bestimmten Masse M an keine Resonanzen mehr berücksichtigt. Diese Modellfunktion (wegen ihrer analytischen Eigenschaften "Doppelschnitt-Modell" benannt) hat die Form

$$F_{\pi}^D(t) = \left(1 - \frac{t}{m_{\rho}^2}\right)^{-\nu} \left(1 - \frac{t}{M^2}\right)^{\nu-1},$$

wobei

$$\nu \lesssim 1 \quad \text{und} \quad M^2 > m_{\rho}^2.$$

Kann M^2 bestimmt werden, so erhält man damit einen Hinweis, ab welcher Energie keine Resonanz zu erwarten ist, welche den FF des Pions beeinflusst.

Die Bestimmung von M^2 ist nur dann möglich, wenn die elektromagnetische Pion-Massendifferenz und der Exponent ν , der aus den δ_{11} -Phasendaten zu entnehmen ist, genau bekannt sind.

1. DEFINITION UND BEDEUTUNG DES PION-FORMFAKTORS

=====

Der el. mag. FF des π -Mesons F_π beschreibt den Einfluß der räumlichen Ladungsverteilung auf die WW zwischen dem Pion und dem el. mag. Feld.

Es wird angenommen, daß die Ladung räumlich "ausgeschmiert" ist wegen der starken WW der π -Mesonen, die durch Baryon-Antibaryon-Paarerzeugung, ϱ -Mesonen-Erzeugung oder ähnliche Prozesse beschrieben wird.

Üblicherweise wird F_π durch die Streuung eines π -Mesons an einem el. mag. Feld definiert. (Siehe z.B. Ref. 1)

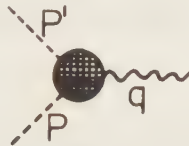


Fig. 1.1 Feynman-Diagramm zur Def. von F_π

Das Feynman - Diagramm zur Definition des el. mag. Formfaktors des Pions (Fig. 1.1) beschreibt die ein- und auslaufenden reellen π -Mesonen mit den Viererimpulsen P bzw. P' . $q = P' - P$ ist der Energie-Impulsübertrag bei der WW mit dem el. mag. Feld. Der "Knödel" zwischen den π -Mesonenlinien (----) und der Photonenlinie (~~~~) beschreibt den el. mag. FF des Pions F_π .

Zur Definition des FF betrachten wir das Matrixelement des Ladungs-Stromdichteoperators $j_\mu(P, P')$ des Pions zwischen den Zuständen P und P' .

Diese Größe ist ein 4-Vektor und kann daher folgendermaßen beschrieben werden

$$j_{\mu}(P, P') = P_{\mu} f(P^2, P'^2, P \cdot P') + P'_{\mu} g(P^2, P'^2, P \cdot P') \quad (1.1)$$

Da P und P' reelle Teilchen bezeichnen, ist $P^2 = P'^2 = m_{\pi}^2$ und daher $q^2 = 2(m_{\pi}^2 - P \cdot P')$ ^{*)}. Folglich sind die skalaren Funktionen f und g allein von q^2 abhängig. Gleichung (1.1) vereinfacht sich damit zu

$$j_{\mu}(P, P') = P_{\mu} f(q^2) + P'_{\mu} g(q^2) \quad (1.2)$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung für den Strom j gilt außerdem

$$(P'_{\mu} - P_{\mu}) j^{\mu}(P, P') = 0 \quad (1.3)$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt, daß f und g identisch sein müssen.

$$G_{\pi}(q^2) \equiv f(q^2) = g(q^2) \quad (1.4)$$

^{*)} Wir setzen $\hbar = c = 1$ und benutzen die Metrik $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$, so daß $p^2 = m^2$.

Damit erhält man

$$\dot{j}_\mu(P, P') = (P_\mu + P'_\mu) G_\pi(q^2) \quad (1.5)$$

Da der Strom reell, d.h. der Stromoperator (1.5) hermitesch ist, gilt außerdem

$$G_\pi(q^2) = G_\pi^*(q^2) \quad , \quad (1.6)$$

d. h. $G_\pi(q^2)$ ist eine reelle skalare Funktion für raumartiges $q^2 = (P' - P)^2$.

Für genügend kleine q^2 muß (1.5) in den Ausdruck übergehen, den die Störungsrechnung dafür liefert

$$\dot{j}_\mu(P, P') \rightarrow (P_\mu + P'_\mu) Q_\pi \quad ; \quad (1.7)$$

hier bezeichnet $Q_\pi = \frac{1}{4\pi} e$ die Ladung des Pions.

Es ist also

$$G_\pi(0) = Q_\pi \quad (1.8)$$

Dementsprechend wird $G_\pi(q^2)$ interpretiert als die effektive Ladung des Pions bei der Energie-Impulsübertragung q .

Der (reduzierte) Formfaktor des Pions

$$F_{\pi}(q^2) = \frac{G_{\pi}(q^2)}{G_{\pi}(0)} = \frac{1}{Q_{\pi}} G_{\pi}(q^2) \quad (1.9)$$

beschreibt also die innere Struktur der Ladung des Pions. In der nicht-relativistischen Grenze ist G_{π} die Fourier-Transformierte der statischen Ladungsdichte $\rho_{\pi}(r)$ des Pions

$$G_{\pi}(q^2) = \int \rho_{\pi}(r) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\tau \quad (1.10)$$

Für genügend kleine q^2 läßt sich die Exponentialfunktion entwickeln, und man erhält

$$F_{\pi}(q^2) = 1 - \frac{1}{6} \overline{r^2} (-q^2) + \dots \quad (1.11)$$

wobei

$$\overline{r^2} = \frac{1}{G_{\pi}(0)} \int r^2 \rho_{\pi}(r) d\tau \quad (1.12)$$

der mittlere quadratische Radius der Ladungsverteilung des Pions ist.

Im Gegensatz zum Strukturproblem bei den Nukleonen gibt es hier nur einen FF der Ladung, weil das Pion

als Teilchen mit Spin 0 kein magnetisches Moment besitzt.

Die Beziehung zwischen den Formfaktoren der verschiedenen geladenen Pionen läßt sich leicht aus der Invarianz der Theorie gegen Ladungskonjugation herleiten.

Da das π^+ das Antiteilchen des π^- und dieses wiederum das Antiteilchen des π^+ ist, erhalten wir

$$G_{\pi^+}(q^2) = -G_{\pi^-}(q^2) \quad (1.13)$$

und

$$F_{\pi^+}(q^2) = F_{\pi^-}(q^2) \quad (1.14)$$

Das π^0 ist sein eigenes Antiteilchen, so daß

$$F_{\pi^0}(q^2) \equiv 0 \quad (1.15)$$

F_{π} ist also ein Vektor im Isospinraum (Isovektor) mit einem verschwindenden skalaren Anteil.

2. DIE ANALYTISCHEN EIGENSCHAFTEN VON F_{π}

A) Dispersionsbeziehungen für $F_{\pi}(t)$

Der Formfaktor ist ein Bestandteil der Streuamplitude der Elektron-Pion-Streuung, welche bezüglich der elektromagnetischen Wechselwirkung in niederster störungstheoretischer Näherung entwickelt wurde. Die analytischen Eigenschaften, welche für jeden Term der störungstheoretischen Entwicklung der $e-\pi$ Streuamplitude gelten, übertragen sich somit auch auf den Formfaktor.

Die Streuamplitude der Pionpaarerzeugung durch Elektronenpaarvernichtung ist dieselbe analytische Funktion wie diejenige der $e-\pi$ Streuung. Folglich ist $F_{\pi}(q^2)$ im Erzeugungsbereich $q^2 > 0$ die analytische Fortsetzung von $F_{\pi}(q^2)$ im Streubereich $q^2 < 0$.

Die Bedingung der Unitarität der Streumatrix verlangt die Gültigkeit des "optischen Theorems". Die Anwendung dieses Theorems auf die Amplitude des Prozesses $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ führt auf die Aussage, daß $F_{\pi}(q^2)$ an der Stelle $q^2 = 4m_{\pi}^2$ einen Verzweigungspunkt besitzt, also für $q^2 \geq 4m_{\pi}^2$ einen nicht verschwindenden Imaginärteil aufweist. Für $q^2 < 4m_{\pi}^2$ dagegen ist $F_{\pi}(q^2)$ eine reelle Funktion. Außerdem kann F_{π} weder im "unphysikalischen Bereich" $4m_{\pi}^2 > q^2 > 0$ noch im Streubereich $q^2 < 0$ eine Singularität haben.

Die Streuamplitude ist die Fouriertransformierte der raumzeitlichen Übertragungsfunktion, welche sich infolge des Kausalitätsprinzips als halbseitig bezüglich der Zeit darstellen lassen muß.*) Demgemäß ist unter Benutzung eines bekannten mathematischen Satzes die Streuamplitude und folglich auch der FF des Pions in einer komplexen Halbebene $\text{Im}(q^2) > 0$ regulär.

Da F_π auf der reellen Achse stückweise reell ist, muß die Funktion infolge des Schwarz'schen Spiegelungsprinzips überall in der komplexen Ebene regulär sein, außer auf der reellen Achse mit $q^2 \geq 4m_\pi^2$.

Real- und Imaginärteil von F_π bilden somit auf der reellen Achse Hilberttransformierte. Für reelles $t = q^2 < 0$ gilt somit folgende Dispersionsbeziehung

$$F_\pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\text{Im} F_\pi(y) dy}{y-t-i\epsilon} \quad (2,1)$$

falls $F_\pi \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Falls nur die schwächere Konvergenzbedingung $F_\pi/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ erfüllt werden kann, gilt stattdessen die "subtrahierte" Dis-

*) Die besondere Problematik der angedeuteten Schlußweise kann hier nicht ausgeführt werden. Es wird auf die Literatur verwiesen.

persionsbeziehung

$$F_{\pi}(t) = 1 + \frac{t}{\pi} \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{\text{Im} F_{\pi}(y) dy}{y(y-t-i\epsilon)} \quad (2.2)$$

welche die Normierung $F_{\pi}(0) = 1$ gleich mit enthält.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, werden in späteren Abschnitten für F_{π} Modellfunktionen eingeführt werden. Es wird jeweils gezeigt, daß die verwendeten Funktionsansätze den angeführten analytischen Eigenschaften des Pion-FF-s genügen.

In Abschnitt 5. wird der Zusammenhang des FF-s mit dem Pion-Massenunterschied erörtert. Die Konvergenz des el. mag. Anteils des Massenunterschiedes verlangt, daß F_{π} mit $t \rightarrow \infty$ verschwindet. Dieser Sachverhalt sei hier bereits erwähnt und mit zu den analytischen Eigenschaften des FF-s hinzugerechnet.

B) Das Omnès-Integral für $F_{\pi}(t)$

Wie für jede komplexe Funktion gilt auch für den Pion-FF

$$F_{\pi}(t) = \left| F_{\pi}(t) \right| e^{i\delta(t)} \quad (2.3a)$$

oder

$$F_{\pi}(t) = F_{\pi}^*(t) e^{2i\delta(t)} \quad , \quad (2.3b)$$

wobei $\delta(t)$ die Phase von $F_{\pi}(t)$ ist.

Aus dieser Gleichung erhält man

$$\text{Im} F_{\pi}(t) = t g \delta(t) \text{Re} F_{\pi}(t) \quad (2.4)$$

Setzt man diese Relation in (2.2) ein, so ergibt sich eine Dispersionsbeziehung für $\text{Re} F_{\pi}(t)$

$$F_{\pi}(t) = F_{\pi}(0) + \frac{t}{\pi} \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{t g \delta(y) \text{Re} F_{\pi}(y)}{y(y-t-i\varepsilon)} dy \quad . \quad (2.5)$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall der sog. Omnès-Gleichung³ und kann folgendermaßen gelöst werden:

Aus der Phasenrelation (2.3) ergibt sich zunächst

$$\text{Im } \log F_{\pi}(t) = \delta(t) \text{ für } t \geq 4m_{\pi}^2 \quad (2.6)$$

Abgesehen von einem Schnitt entlang der reellen Achse $t \geq 4m_{\pi}^2$ ist $F_{\pi}(t)$ in der ganzen komplexen t -Ebene analytisch. Aus diesem Grund ist auch $\log F_{\pi}(t)$ in der selben Ebene analytisch, falls $|F_{\pi}(t)|$ nicht verschwindet. Daher kann für $\log F_{\pi}(t)$ eine Dispersionsbeziehung geschrieben werden

$$\log F_{\pi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{\text{Im}[\log F_{\pi}(y)]}{y-t-i\varepsilon} dy + C \quad (2.7)$$

wobei C eine beliebige Konstante ist.

Stattdessen kann auch eine subtrahierte Dispersionsbeziehung geschrieben werden

$$\log F_{\pi}(t) = \frac{t}{\pi} \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{\text{Im}[\log F_{\pi}(y)]}{y(y-t-i\varepsilon)} dy + C' \quad (2.8)$$

Diese Gleichung ist äquivalent mit

$$F_{\pi}(t) = C' \exp \left\{ \frac{t}{\pi} \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{\delta(y) dy}{y(y-t-i\varepsilon)} \right\} \quad (2.9)$$

Hier ist $C' = e^{C'} = F_{\pi}(0) = 1$ zu wählen^{*)}.

Wegen (2.6) erhält man schließlich

$$F_{\pi}(t) = \exp \left\{ \frac{t}{\pi} \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{\delta(y) dy}{y(y-t-i\varepsilon)} \right\} \quad (2.10a)$$

bzw.

$$F_{\pi}(-t) = \exp \left\{ -\frac{t}{\pi} \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{\delta(-y) dy}{y(y+t-i\varepsilon)} \right\} \quad (2.10b)$$

Bei Kenntnis der Phase $\delta(t)$ bzw. $\delta(-t)$ kann daher $F_{\pi}(t)$ bestimmt werden.

^{*)} Wenn $\ln F_{\pi}(t) \leq t^k$ für $t \rightarrow \infty$, so kann C' im allgemeinen ein beliebiges Polynom der Ord. k sein. Aus physikalischen Gründen, die später erörtert werden, hat man zu verlangen, daß $k=0$ ist und C' eine Konstante wird.

3. DIE BEZIEHUNG ZWISCHEN DER $\pi\pi$ -STREUPHASE $\delta_{11}(t)$ UND DER FF-PHASE $\delta(t)$

Aus der Unitaritätsbedingung für die S-Matrix läßt sich zeigen, daß der Imaginärteil einer Streuamplitude proportional zu einer Summe von Termen ist. Diese bilden sich aus dem Produkt der Übergangsamplitude vom Anfangszustand in einen kinematisch erreichbaren Zwischenzustand und der Übergangsamplitude von diesem Zwischenzustand in den Endzustand. Daher kann man bei der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ den Imaginärteil der Reaktionsamplitude und somit auch des Pion-FF-s im Erzeugungsbereich als eine Summe von Termen über die erlaubten Zwischenzustände darstellen.

Aus Gründen der Paritätserhaltung dürfen die Zwischenzustände nur eine gerade Anzahl von Pionen enthalten und wegen der Drehimpulserhaltung den Drehimpuls $J = 1$ haben.

Bei der Streuung von Pionen an einem el. mag. Feld ist daher der leichteste ein 2π -Zwischenzustand. Schematisch wird dies durch folgendes Diagramm illustriert:

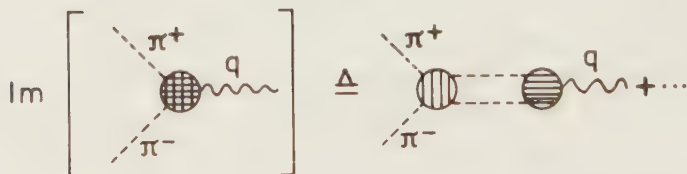


Fig. 3.1 Der Imaginärteil des el. mag. Vertex
des Pions

Das $(\pi^+\pi^-)$ -System hat den Isotopenspin $T = 1$, und daher läßt sich der Imaginärteil von F_π - für $q^2 < 16m_\pi^2$ - als Produkt von F_π und der $\pi\pi$ -Streuamplitude für den Zustand $T = 1$, $J = 1$ darstellen.

Der Vergleich der linken Seite von Fig. 3.1 mit der rechten ergibt²⁹

$$\text{Im}F_\pi(q^2) = \exp \left\{ -i\delta_{11}(q^2) \right\} \sin \delta_{11}(q^2) F_\pi(q^2 + i0), \quad (3.1)$$

wobei δ_{11} die $\pi\pi$ -Streuphase im Zustand $J = T = 1$ ist. Da $\text{Im}F_\pi(q^2)$ reell ist, muß die Phase des FF-s gleich der Phase δ_{11} der $\pi\pi$ -Streuamplitude im Bereich $4m_\pi^2 \leq t = q^2 < 16m_\pi^2$ sein, also

$$\delta(t) = \delta_{11}(t) \quad \text{für } 4m_\pi^2 \leq t = q^2 < 16m_\pi^2. \quad (3.2)$$

Der 2π -Zwischenzustand, der erst für Energie-Impulsübertragungen t ab $4m_\pi^2$ erreichbar ist, dominiert auch für größere t ab $16m_\pi^2$. Daher ist anzunehmen, daß Gl.3.2 auch für $t \geq 16m_\pi^2$ in guter Näherung erfüllt wird, d.h.

$$\delta(t) \simeq \delta_{11}(t) \quad \text{für } t \geq 16m_\pi^2. \quad (3.3)$$

4. EXPERIMENTELLE BESTIMMUNG VON F_π

Die Messung des Pion Formfaktors wird hauptsächlich in zwei Bereichen durchgeführt; im raumartigen, d.h. für Energie-Impulsüberträge $q^2 < 0$ und für zeitartige $q^2 > 0$.

A) $F_\pi(t)$ im Streubereich

Eine direkte Messung von F_π im raumartigen Bereich $q^2 < 0$ ist durch den Umstand erschwert, daß keine π -Meson-Targets zur Verfügung stehen. Man muß daher die instabilen Pionen auf Elektronen schießen, die schwereren Teilchen also an den leichteren streuen. Ein solches Experiment wird z.Z. in Serpukhov durchgeführt.

Die Wirkungsquerschnitte sind sehr klein, aber erste Daten wurden schon angegeben⁵ und ausgewertet²⁵.

(Siehe Fig. 4.1)

In diesem Experiment werden die hochenergetischen π -Mesonen (50 GeV) an dem Elektron eines Wasserstoff-targets gestreut. Der Energie-Impulsübertrag $-t$ ist bei der genannten Einschußenergie der Pionen nicht größer als 0.05 GeV^2 .

Daher liefert das Experiment nur eine Angabe über den rms-Radius des Pions r_π , d.h. über die Tangente von $F_\pi(t)$ an der Stelle $t = 0$.

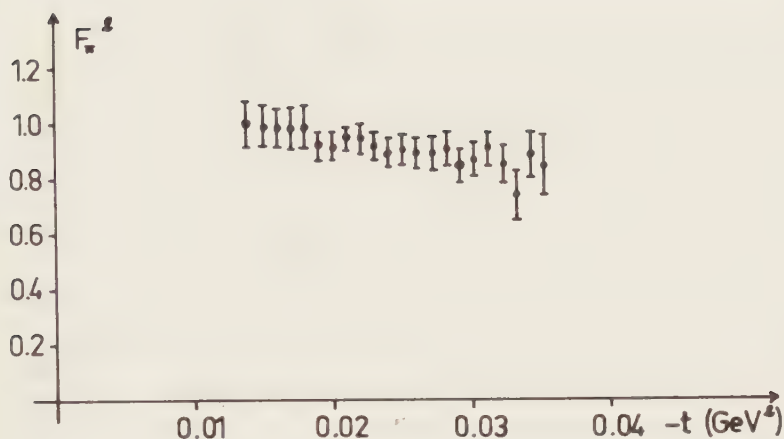


Fig. 4.1 F_π^2 für kleine t nach Ref. 25

Zur Bestimmung von F_π bei Energie-Impulsübertragungen im GeV-Bereich sind Streureaktionen heranzuziehen, aus denen die Werte für F_π durch geeignete Extrapolation gewonnen werden können. So enthält die Amplitude der Elektroproduktion von Pionen $e + p \rightarrow e + \pi + n$ den Pionvertex als dominierenden Faktor. (Fig. 4.2)

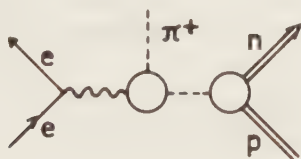


Fig. 4.2 Feynman-Diagramm zur Elektroproduktion von Pionen in niedrigster Ordnung der Störungstheorie

Allerdings ist das am Nukleonenstrom erzeugte Pion nicht reell. Die experimentellen Daten liefern Werte des Pionvertex, bei denen das Massenquadrat des virtuellen Pions um mindestens $-2m_\pi^2$ von der Massenschale entfernt liegt.

Um den FF des Pions zu gewinnen hat man die experimentellen Daten auf m_π^2 in den unphysikalischen Bereich zu extrapolieren. Dabei sind zusätzliche Überlegungen und Informationen über das Verhalten des Nukleonenvertex erforderlich. Insbesondere sind Korrekturen infolge der bei diesen Messungen vorkommenden Nukleonenanregungen nötig.

Auf diese Weise wurden Daten für $F_\pi(q^2)$ gewonnen, die gegenwärtig bis zu $q^2 = 2 \text{ GeV}^2$ reichen⁶.

(Siehe Fig. 4.3)

Allerdings sind die Unterschiede infolge der Extrapolation noch beachtlich. Diese kommen in der Fig. 4.3 nicht voll zur Geltung, da dort die Fehlerbalken teilweise nur die reinen Meßfehlergrenzen anzeigen.

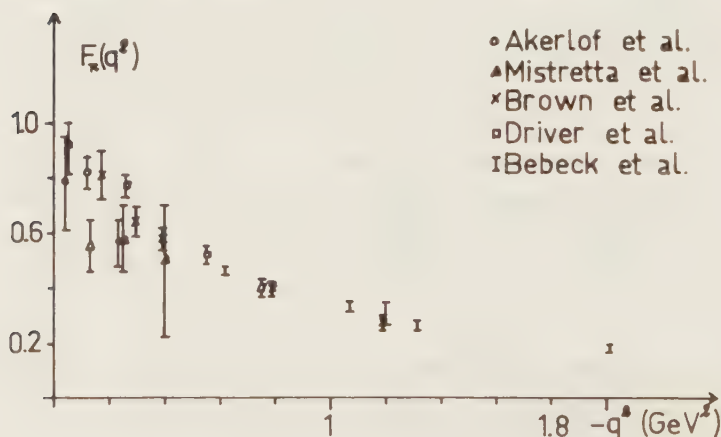


Fig. 4.3 F_π im Streubereich

B) $F_{\pi}(t)$ im Erzeugungsbereich

Im Erzeugungsbereich $t \geq 4m_{\pi}^2$ ist $F_{\pi}(t)$ komplex.

Der Wirkungsquerschnitt der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ enthält $|F_{\pi}|^2$ als Faktor. Seine Messung gestattet somit die Bestimmung des Absolutbetrages des FF-s.

Fig. 4.4 zeigt neuere Daten¹¹ im Bereich $0.6 \leq t^{1/2} \leq 3$ GeV.

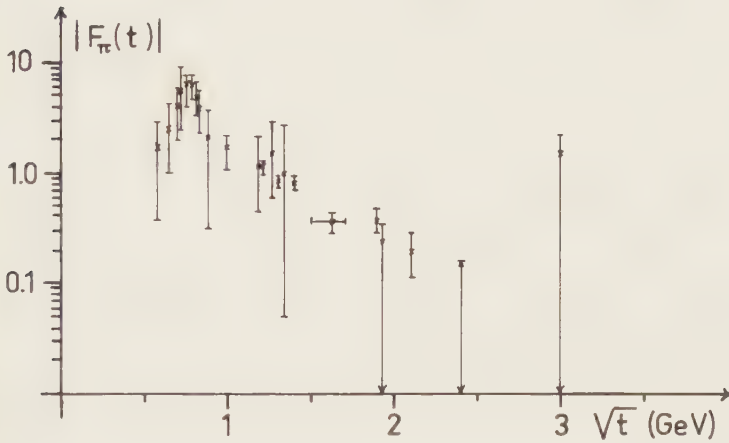


Fig. 4.4 $|F_{\pi}|$ im Erzeugungsbereich

Die Resonanz bei $m_{\rho} = 0.77$ GeV ist deutlich ausgeprägt, während weitere Resonanzen, insbesondere bei $m_{\phi} = 1.7$ GeV in den noch ziemlich großen Fehlergrenzen untergehen.

C) Die FF-Phase $\delta(t)$

Die Phase von F_π entlang des Schnittes $t \gg 4m_\pi^2$ kann mit Hilfe der Chew-Low-Extrapolation⁷ der $\pi\pi$ -Streuamplitude (mit $J = T = 1$) aus der $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ Messungen gewonnen werden⁸⁻¹⁰. Denn es ist ja, wie bereits in Abschnitt 3 erwähnt wurde, die $\pi\pi$ -Streuphase δ_{11} mit der Phase von F_π im Bereich $4m_\pi^2 \leq t < 16m_\pi^2$ identisch und für $t \gg 16m_\pi^2$ in guter Näherung gleichzusetzen. Folgende Skizze (Fig. 4.5) zeigt die Phasendaten, die in Ref. 10 angegeben werden.

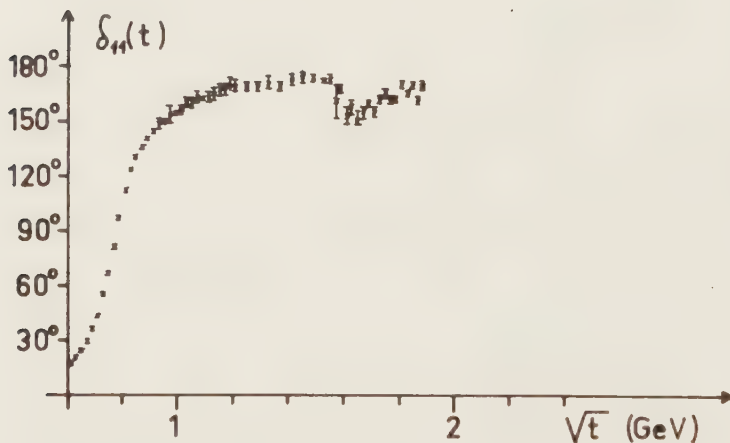


Fig. 4.5 Die Phase δ_{11} nach Ref. 10

Diese Daten sind mit relativ kleinen Meßfehlern behaftet, so daß sie sich für die Bestimmung der FF-Phase sehr gut eignen.

5. DIE MASSENDIFFERENZ ALS PARAMETER FÜR DEN FF

Die Massendifferenz zwischen den geladenen und neutralen Pionen ist hauptsächlich aus der el. mag. Selbstenergie (SE) des geladenen Pions zu erklären¹³. Wegen der elektrischen Struktur des Pions ist die SE eine endliche Größe. Ein Ausdruck für diese SE bis zur ersten Ordnung in der Feinstrukturkonstante wurde von mehreren Autoren abgeleitet¹³⁻¹⁶.

Eine exakte Ableitung wurde zunächst von Riazuddin,¹⁵ die später von Barger und Kazes¹⁶ bestätigt wurde, mit Hilfe von Dispersionsbeziehungen für die Compton-Streuung von virtuellen Photonen an Pionen durchgeführt.

Dasselbe Resultat kann leicht erhalten werden, wenn man die Technik von Salecker¹ benutzt. Er hat gezeigt, daß in der πe -Streuung wie in der $\pi\pi$ -Streuung (Fig. 5.1) der Pionformfaktor von dem Vertex auf den Photonpropagator umgewälzt werden kann.

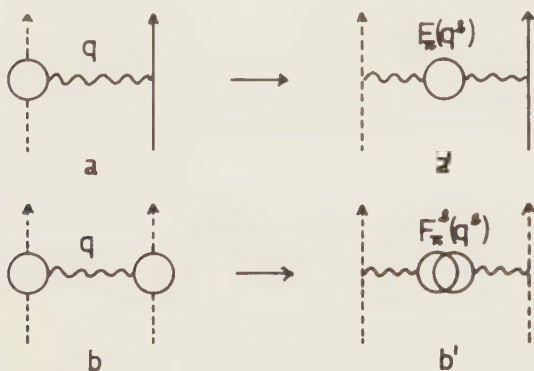


Fig. 5.1 Umwälzung von F_π bei der πe und $\pi\pi$ -Streuung

Diese Technik kann graphisch durch folgende zwei Figuren (Fig. 5.2, 5.3) demonstriert werden. Die Pion SE wird durch ~~durch~~ die Diagramme Fig. 5.2a,b dargestellt.

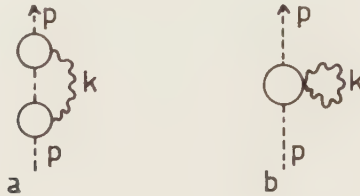


Fig. 5.2 Die Pion-SE-Diagramme

Die von Salecker vorgeschlagene Technik bewirkt, in Diagrammschreibweise (Fig. 5.3a , b)

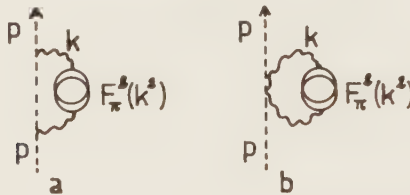


Fig. 5.3 Die modifizierten SE-Diagramme

Nach den Feynman-Regeln liefern diese modifizierten Diagramme folgende Ausdrücke für die SE-Integrale:

$$(SE)_a = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{(2p-k)^2 F_\pi^2(k^2)}{[(p-k)^2 - m_\pi^2] k^2} \quad (5.1)$$

und

$$(SE)_b = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{4 F_\pi^2(k^2)}{k^2} \quad (5.2)$$

Da das π^0 kein el. mag. Feld besitzt, ist die el. mag. SE des π^+ (bzw. π^-) identisch mit dem el. mag. Anteil zum Unterschied der Massenquadrate von $\pi^\pm$ und π^0 . Es ist also

$$\begin{aligned} \delta m_{em}^2 &= (SE)_a + (SE)_b \\ &= - \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \left[\frac{4m_\pi^2 + 2(k^2 - 2P \cdot k) - k^2}{k^2 (k^2 - 2P \cdot k)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{k^2} \right] F_\pi^2(k^2). \quad (5.3a) \end{aligned}$$

Es erweist sich als vorteilhaft, dieses vierdimensionale Integral in Polarkoordinaten auszudrücken.

Man muß dabei allerdings darauf achten, daß $F_\pi(k^2)$

Schnitte bei $k_0 > \sqrt{k^2 + 4m_\pi^2}$ und $k_0 < -\sqrt{k^2 + 4m_\pi^2}$ hat.

Nach der Beschreibung von Feynman verläuft die k_0 -Integration entlang $\text{Re } k_0 \pm i\varepsilon$ für $k_0 \gtrless 0$, d.h. auch entlang der positiven Ufer dieser Schnitte.

Durch Linksdrehung der k_0 -Achse um 90° in der komplexen Ebene erreicht man, daß die Integration wie in einem vierdimensionalen Euklidischen Raum erfolgen kann. Nach Einführung der Polarkoordinaten (Siehe dazu z.B. Jauch und Rohrlich¹⁷ S. 454) und Integration über die drei Polarwinkel erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\delta m_{em}^2 = \frac{2\alpha}{\pi} m_\pi^2 \int_0^\infty dz F_\pi^2(-4m_\pi^2 z) \left[(1+z)^{3/2} z^{-1/2} - z \right]. \quad (5.3b)$$

Es ist hier zu bemerken, daß (5.3) als Approximation betrachtet werden muß. Die Ableitung dieses Ausdrucks mit Hilfe von Dispersionsbeziehungen^{15, 16} bezieht sich nur auf den ein-Pion-Zwischenzustand für die Compton-Amplitude. Die angegebene Ableitung, wie von Salecker vorgeschlagen¹⁸, beruht effektiv auf einer Taylor-Entwicklung der Vertexfunktion um die Massenschale des Pions und berücksichtigt nur das erste Glied, das mit dem FF identisch ist.

Man muß beachten, daß die Pion-Massendifferenz¹⁹ ($\delta m = 4.604 \text{ MeV}$) aus verschiedenen Beiträgen zusammengesetzt ist. Sie ist als Summe von Termen

$$\delta m = \delta m_{em} + \delta m_{had} + \delta m_{sw} \quad (5.4)$$

darstellbar, von denen die erwähnte el. mag. SE nur einen Teil ausmacht. Weitere Beiträge sind δm_{had} , der hadronische Teil; sowie δm_{sw} , der Anteil infolge der schwachen WW. δm_{sw} kann wegen der schwachen Kopplung an das Pionfeld vernachlässigt werden.

Würde δm_{had} sich auch als sehr klein herausstellen, dann hätten wir mit Gl. (5.3) eine einfache Theorie der Pion Massendifferenz einerseits, und andererseits eine wichtige Integralgleichung für den Pion FF für raumartige $t < 0$.

Im Folgenden wird zunächst gezeigt, daß Beiträge aus nicht el. mag. WWn tatsächlich sehr klein sind. Danach wird die Frage untersucht, ob δm_{em} mehr von der elektrischen Struktur des π -Mesons innerhalb oder außerhalb der Compton Wellenlänge abhängig ist.

Eine Untersuchung von Gl. (5.3) zeigt, daß die el. mag. Massendifferenz ein Hochenergieeffekt ist, d.h. daß die el. mag. Feldenergie sich im Inneren des rms-Radius konzentriert. Diese Tatsache ermöglicht es, Aussagen über das asymptotische Verhalten von F_π zu machen, d.h. über das Verhalten von F_π in Regionen, die dem Experiment schwer zugänglich sind.

Modelle für F_π , welche mit den verschiedenen vorhandenen experimentellen Daten gut übereinstimmen, werden dann mit Hilfe von Gl. (5.3) geprüft.

6. NICHT-ELEKTROMAGNETISCHE BEITRÄGE ZUR PION-

MASSENDIFFERENZ

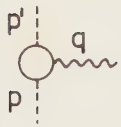
Unter "nicht-el. mag.-Beiträgen" zur Massendifferenz verstehen wir Beiträge infolge nicht rein el. mag. WW. Solche Beiträge sind z.B. die Selbstenergien, die sich aus dem virtuellen Zerfall der Pionen in zwei Baryonen B_1 und $\bar{B}_2$ mit den Massen M_1 und M_2 (die verschieden sein können) ; außerdem die Strahlungskorrekturen zu diesen Beiträgen, ferner Beiträge, die wegen den möglichen Übergängen der Pionen in andere Teilchen desselben Oktets (SU3) möglich sind.

Es werden auch Beiträge zur Massendifferenz untersucht , die von schweren Zwischenzuständen bei der Pion SE kommen, sowie auch der Beitrag infolge virtueller $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -Zerfälle berechnet.

Alle obenerwähnten Beiträge werden durch Feynman-Diagramme dargestellt. Dabei sind die noch wenig genau bekannten Vertexfunktionen dieser SE Diagramme durch plausible Modellfunktionen zu approximieren. In der folgenden Figur (Fig. 6.1) zeigen wir die Vertices und die entsprechenden Substitutionen, die auf plausiblen Modellen basieren.

Vertex

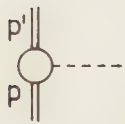
Substituiertes Vertex Modell



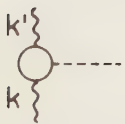
$$(p+p')_\mu F_\pi(q^2); F_\pi(q^2) = (1 - \frac{q^2}{\Lambda_\pi^2})^{-1}$$



$$i_\mu F_N(q^2); F_N(q^2) = (1 - \frac{q^2}{\Lambda_N^2})^{-2}$$



$$\gamma_5 \sqrt{F_\pi(p^2) F_\pi(p'^2)}$$



$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} k^\mu k'^\nu \sqrt{F_\pi(k^2) F_\pi(k'^2)}$$

Fig. 6.1 Vertices und ihre Substitutionen

A) Baryonische Beiträge zur Pion-Massendifferenz

Unter "baryonischen Beiträgen" zur Pion-Massendifferenz sind die Beiträge infolge der virtuellen Zerfälle der Pionen in zwei Baryonen und zwar ohne Strahlungskorrekturen zu verstehen.

Um die baryonischen Beiträge zur Pion-Massendifferenz zu berechnen, genügt es, die Vakuumpolarisations-Diagramme in niedrigster Ordnung der Störungstheorie, die dem virtuellen Zerfall des Pions in ein Baryon-Antibaryon-Paar ($B_1, \bar{B}_2$) entsprechen, zu betrachten. Die Beiträge aus höheren Ordnungen tragen nichts bei, da in höheren Ordnungen der Störungstheorie (ohne Strahlungskorrekturen) die Diagramme sich für die geladenen Pionen von den ungeladenen in keiner Weise unterscheiden.

Folgendes Diagramm (Fig. 6.2) zeigt die zu berechnende Amplitude einschließlich der erforderlichen Vertexkorrekturen.

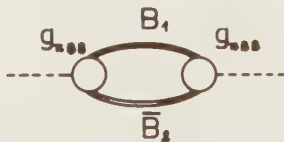


Fig. 6.2 Vakuumpolarisations-Diagramm für das Pion in niedrigster Ordnung der Störungstheorie

Dieses Diagramm repräsentiert den quadratischen Beitrag zur Pionenmasse

$$\begin{aligned}
 m_{\pi B}^2 &= \frac{g_{\pi B_1 B_2}^2}{4\pi} \Delta_{B_1 B_2}^2 \\
 &= \frac{-i}{(2\pi)^4} g_{\pi B_1 B_2}^2 \int d^4k \frac{\text{Tr} \{ \gamma_5 (\not{k} + M_1) \gamma_5 (\not{P} - \not{k} + M_2) \}}{(k^2 - M_1^2) [(P-k)^2 - M_2^2]} V^2(P, k, k') .
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

In dieser Gleichung (6.1) ist $V(p, k, k')$ die approximierte Vertexfunktion

$$V(p, k, k') = [F_N(p^2) F_N(k'^2)]^{1/2}, \quad (6.2a)$$

wobei

$$k' = p - k, \quad p^2 = m_\pi^2 \quad \text{und} \quad F_N(t) = \left(1 - \frac{t}{\Lambda^2}\right)^{-2}. \quad (6.2b)$$

Die Wahl dieses Modells für die Vertexfunktion wird dadurch begründet, daß beide Anteile des Nukleon-Formfaktors, der elektromagnetische sowie der pionische, sich wie $1/t^2$ für große t verhalten¹⁸.

Weiter wird angenommen, daß alle anderen Baryon-FF-n dasselbe Verhalten für große t aufweisen.

Die folgenden Ergebnisse sind also in diesem Sinne zu verstehen.

Zur Vereinfachung der Rechnung wird weiter vorausgesetzt, daß $m_\pi^2 \ll \Lambda^2$ gilt. Ferner wird die Tatsache verwendet, daß $m_\pi^2 \ll M_1^2, M_2^2$ ist^{*)}.

Es wird also das Integral

$$\Delta_{B_1 B_2}^2 \simeq - \frac{8i\Lambda^8}{(2\pi)^3} \int d^4k \frac{M_1 M_2 - k^2}{(k^2 - M_1^2)(k^2 - M_2^2)(k^2 - \Lambda^2)^4} \quad (6.3)$$

berechnet.

*) Eine Berechnung, die m_π gegenüber den anderen Massen nicht vernachlässigte, erbrachte einen viel komplizierteren Ausdruck für $m_{\pi B}^2$, der sich aber numerisch nur um 3% von der hier betrachteten vereinfachten Größe unterscheidet.

Dieses Integral (6.3) kann leichter berechnet werden, indem man vierdimensionale Polarkoordinaten verwendet. Nach der trivialen Integration über die drei Polarwinkel erhält man den Ausdruck

$$\Delta_{B_1 B_2}^2 \simeq \frac{\Lambda^8}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{Z(Z+M_1 M_2)}{(Z+M_1^2)(Z+M_2^2)(Z+\Lambda^2)^4} \quad , \quad (6.4)$$

wobei die Substitution $K^2 = z$ schon durchgeführt wurde. ^{*)} Zur Integration zerlegt man den Integranden und erhält

$$\Delta_{B_1 B_2}^2 \simeq \frac{\Lambda^8}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{dz}{(Z+\Lambda^2)^4} - \frac{1}{M_1+M_2} \left[\int_0^\infty \frac{M_1^3 dz}{(Z+M_1^2)(Z+\Lambda^2)^4} + \int_0^\infty \frac{M_2^3 dz}{(Z+M_2^2)(Z+\Lambda^2)^4} \right] \right\} \quad . \quad (6.5)$$

Die Integration dieser Teilintegrale ergibt schließlich

$$\Delta_{B_1 B_2}^2 \simeq \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\Lambda^2}{3} - \frac{B(1,4)}{M_1+M_2} \left[M_1^3 F(4,1;5;1 - \frac{M_1^2}{\Lambda^2}) + M_2^3 F(4,1;5;1 - \frac{M_2^2}{\Lambda^2}) \right] \right\} \quad . \quad (6.6)$$

^{*)} $d^4 k = i K^3 \sin^2 \lambda \sin \vartheta dK d\lambda d\vartheta d\varphi \quad ; \quad K^2 = -k^2$,

$K \in [0, \infty) \quad \lambda, \vartheta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

Für den Fall, daß die Massen der Baryonen gleich sind, d.h. also $M_1=M_2=M$ ist, ergibt sich

$$\Delta_{BB}^2 \approx \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\Lambda^2}{3} - M^2 B(1,4)F(4,1;5;1 - \frac{M^2}{\Lambda^2}) \right\}. \quad (6.7)$$

Das Produkt von der Betafunktion mit der hypergeometrischen Funktion kann hier durch folgende Summe ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} B(1,4)F(4,1;5;Z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{Z^{\nu}}{\nu+4} \\ &= -Z^{-4} \ln(1-Z) - Z^{-4} \sum_{\nu=1}^3 \frac{Z^{\nu}}{\nu} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Eine Orientierung über die Größe des baryonischen SE-Beitrags erhält man, indem man für die Baryonenmasse $M=1$ GeV und für die Abschneide-Masse $\Lambda^2 = 0.71$ GeV² (aus der Vertexfunktion des el. mag. FF des Protons) setzt. Damit wird die $m_{\pi B}^2 = (g^2/4\pi)\Delta_{B, B_s}^2$ gerade von der Größenordnung m_{π}^2 . Dieses Resultat deutet darauf hin, daß die Pionmasse hauptsächlich von der starken WW verursacht wird. Die Differenz der SE Effekte der verschiedenen Zerfallsmöglichkeiten des π^0 und $\pi^{\pm}$ in virtueller Baryonen bestimmt den baryonischen Beitrag der Pion-Massendifferenz. Die Gewichte dieser virtueller Zerfälle bestimmen sich aus der SU3-invarianten Meson-Baryon WW²⁰. Die Zerfallsmöglichkeiten und deren Gewichte für π^0 , π^+ und π^- werden aus folgende Beziehung entnommen:

$$\begin{aligned}
 W_{\pi B} = & g \left\{ (\bar{p} p) \pi^0 - (\bar{n} n) \pi^0 + \sqrt{2} (\bar{p} n) \pi^+ + \sqrt{2} (\bar{n} p) \pi^- \right\} \\
 & + g(1-\hat{\alpha}) \left\{ (\bar{\Xi}^0 \Xi^0) \pi^0 - (\bar{\Xi}^- \Xi^-) \pi^0 - \sqrt{2} (\bar{\Xi}^0 \Xi^-) \pi^+ - \sqrt{2} (\bar{\Xi}^- \Xi^0) \pi^- \right\} \\
 & - g\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha}) \left\{ (\bar{\Sigma}^- \Sigma^-) \pi^0 - (\bar{\Sigma}^+ \Sigma^+) \pi^0 + (\bar{\Sigma}^+ \Sigma^0 - \bar{\Sigma}^0 \Sigma^-) \pi^+ + (\bar{\Sigma}^0 \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^- \Sigma^0) \pi^- \right\} \\
 & + g \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{\alpha} \left\{ (\bar{\Lambda} \Sigma^0 + \bar{\Lambda} \bar{\Sigma}^0) \pi^0 + (\bar{\Lambda} \Sigma^- + \bar{\Lambda} \bar{\Sigma}^+) \pi^+ + (\bar{\Lambda} \Sigma^+ + \bar{\Lambda} \bar{\Sigma}^-) \pi^- \right\}. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Entsprechend diesen Gewichten erhält man für die verschiedenen Beiträge zum Massenunterschied zwischen den geladenen und dem neutralen Pion $\delta m_{\pi B} = \frac{1}{2} m_{\pi^+ B} + \frac{1}{2} m_{\pi^- B} - m_{\pi^0 B}$ folgende Werte:

$$\begin{aligned}
 \delta m_{NN} &= \square_{NN} \quad ; \quad \square_{NN} = \frac{g^2}{4\pi} (2\Delta_{pn} - \Delta_{pp} - \Delta_{nn}) \\
 \delta m_{\Lambda\Sigma} &= \frac{4}{3} \hat{\alpha}^2 \square_{\Lambda\Sigma} \quad ; \quad \square_{\Lambda\Sigma} = \frac{g^2}{4\pi} (\Delta_{\Lambda\Sigma^-} + \Delta_{\Sigma^+\Lambda} - 2\Delta_{\Sigma^0\Lambda}) \\
 \delta m_{\Sigma\Sigma} &= 4(1-\hat{\alpha})^2 \square_{\Sigma\Sigma} \quad ; \quad \square_{\Sigma\Sigma} = \frac{g^2}{4\pi} (\Delta_{\Sigma^+\Sigma^0} + \Delta_{\Sigma^-\Sigma^+} - \Delta_{\Sigma^0\Sigma^0} - \Delta_{\Sigma^+\Sigma^+}) \\
 \delta m_{\Xi\Xi} &= (1-\hat{\alpha})^2 \square_{\Xi\Xi} \quad ; \quad \square_{\Xi\Xi} = \frac{g^2}{4\pi} (2\Delta_{\Xi^0\Xi^0} - \Delta_{\Xi^+\Xi^+} - \Delta_{\Xi^-\Xi^-}) \quad . \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

Hier ist

$$\Delta_{B_1 B_2} = \Delta_{B_1 B_2}^2 / (m_{\pi^+} + m_{\pi^0}) \quad .$$

Die Summe dieser Beiträge kann als quadratische Form in dem Mischungsparameter $\hat{\alpha}$ geschrieben werden

$$\delta m_{\pi B} = A_1 + \hat{\alpha} A_2 + \hat{\alpha}^2 A_3 \quad , \quad (6.11a)$$

wobei

$$A_1 = \square_{NN} + 4\square_{\Sigma\Sigma} + \square_{\Xi\Xi}$$

$$A_2 = -8\square_{\Sigma\Sigma} - 4\square_{\Xi\Xi}$$

$$A_3 = 4\left(\square_{\Xi\Xi} + \square_{\Sigma\Sigma} + \frac{1}{3}\square_{\Lambda\Sigma}\right) \quad . \quad (6.11b)$$

Alle Beiträge wurden mit den neuesten Daten¹⁹ der Baryonen- und Mesonenmassen für verschiedene Abschneide-Massen ausgerechnet. In Tab. 6.1 sind die numerischen Resultate aufgeführt. Alle Massen und Massendifferenzen sind in MeV angegeben; die Koppelungskonstante der starken WW ist $g^2/4\pi = 14.64$.

$\Lambda^2 \times 10^{-6}$	$\square_{NN}$	$\square_{\Lambda\Sigma}$	$\square_{\Sigma\Sigma}$	$\square_{\Xi\Xi}$	$\delta m_{\pi B}$
$(0.9384)^2$	-0.001	-0.966	0.891	-0.014	$3.547 - 7.069\hat{\alpha} + 2.218\hat{\alpha}^2$
0.71	-0.001	-0.701	0.646	-0.010	$2.574 - 5.131\hat{\alpha} + 1.610\hat{\alpha}^2$
$(9.384)^2$	-0.057	-62.73	58.003	-1.100	$230.8 - 459.6\hat{\alpha} + 143.9\hat{\alpha}^2$

Tabelle 6.1 Baryonische Anteile zur Massendifferenz für verschiedene Abschneidemassen Λ

Es ist interessant zu bemerken, daß der Mischungsparameter $\hat{\alpha}$ so gewählt werden kann, daß $\delta m_{\pi B}$ in der Grenze $\Lambda \rightarrow \infty$ endlich bleibt. Diese Tatsache kann folgendermaßen gezeigt werden:

Für den Fall, daß $\Lambda \gg M_1, M_2$ vereinfacht sich Gl. (6.6) zu

$$\Delta_{B_1 B_2}^2 = \frac{\Lambda^2}{3\pi} + \frac{1}{\pi} (M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2) \ln \frac{M_0^2}{\Lambda^2} + \Delta_{B_1 B_2}^{(r)}, \quad (6.12)$$

wobei

$$\Delta_{B_1 B_2}^{(r)} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{M_1^3}{M_1 + M_2} \ln \frac{M_1^2}{M_0^2} + \frac{M_2^3}{M_1 + M_2} \ln \frac{M_2^2}{M_0^2} + (M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2) \sum_{r=1}^3 \frac{A_r}{v} \right\}. \quad (6.13)$$

Die Massendifferenz (6.11) vereinfacht sich dann zu

$$\delta m_{\pi B} = (f_1 + f_2 \hat{\alpha} + f_3 \hat{\alpha}^2) \ln \frac{M_0^2}{\Lambda^2} + A_1^{(r)} + A_2^{(r)} + A_3^{(r)}. \quad (6.14)$$

Alle Terme proportional zu Λ^2 heben sich weg, und die restlichen Terme proportional zu $\ln(M_0^2/\Lambda^2)$ sind zusammengefaßt. Die $A_i^{(r)}$ sind genauso definiert wie A_i in (6.11) mit der Ausnahme, daß $\Delta_{B_1 B_2}$ mit $\Delta_{B_1 B_2}^{(r)}$ vertauscht werden muß. Die Koeffizienten f_i sind

$$\begin{aligned} f_1 &= (M_{\pi^+} - M_{\pi^0})^2 + (M_{\pi^0} - M_{\pi^-})^2 - 4M_{\pi^0}(M_{\pi^+} + M_{\pi^-} - 2M_{\pi^0}) \\ f_2 &= 8M_{\pi^0}(M_{\pi^+} + M_{\pi^-} - 2M_{\pi^0}) - 4(M_{\pi^0} - M_{\pi^-})^2 \\ f_3 &= 4(M_{\pi^0} - M_{\pi^-})^2 - 4M_{\pi^0}(M_{\pi^+} + M_{\pi^-} - 2M_{\pi^0}) \\ &\quad + \frac{4}{3}(M_{\pi^+}^2 + M_{\pi^-}^2 - 2M_{\pi^0}^2) - \frac{4}{3}M_{\pi^0}(M_{\pi^+} + M_{\pi^-} - 2M_{\pi^0}) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Der logarithmische Term in (6.14) kann zum Verschwinden gebracht werden, wenn wir für $\hat{\alpha}$ folgenden Ausdruck einsetzen*)

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0 \equiv \frac{1}{2f_3} \left(-f_2 + \sqrt{f_2^2 - 4f_4f_3} \right) \quad . \quad (6.16)$$

Mit den experimentellen Werten für die Baryonmassen¹⁹ erhalten wir dann

$$\hat{\alpha}_0 = 0.6245 \simeq 5/8 \quad . \quad (6.17)$$

Für den Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ und $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0$ wird der Beitrag zur Massendifferenz endlich.

$$\delta m_{\pi B}(\hat{\alpha}_0, \Lambda \rightarrow \infty) = -0.055 \text{ MeV} \quad . \quad (6.18)$$

Der experimentelle Wert von $\hat{\alpha}$ ergibt sich durch Analyse der Pion-Baryon WWn zu²¹

$$\hat{\alpha} = 0.65 \pm 0.05 \quad . \quad (6.19)$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß dieser Wert nahe bei $\hat{\alpha}_0$ liegt, für den $\delta m_{\pi B}$ unabhängig von Λ wird.

Also kann bei dem experimentellen Wert von $\hat{\alpha}$ $\delta m_{\pi B}$

*) $\hat{\alpha}_0$ ist eine Lösung einer quadratischen Gleichung.

Die zweite Lösung ist negativ und bleibt daher außer Betracht.

nicht stark von der Abschn.-Masse Λ abhängig sein.
In Tab. 6.2 sind ein paar numerische Werte von $\delta m_{\pi B}$
(in MeV) für das Cut-off Modell(6.2) angegeben.

$\hat{\alpha} \backslash \Lambda$	0.71 GeV ²	0.939 GeV = M _N	9.39 GeV = 10M _N
0.60	0.076	0.104	6.91
$\hat{\alpha}_0$	-0.0018	-0.0024	-0.043
0.66	-0.1104	-0.1520	-9.782
0.70	-0.23	-0.31	-20.33

Tab. 6.2 Numerische Werte von $\delta m_{\pi B}$ für versch. $\hat{\alpha}$

Die Wahl der Abschn.-Masse wird nur dann von Bedeutung, wenn $\hat{\alpha}$ sich beträchtlich von $\hat{\alpha}_0$ unterscheidet. Andererseits ist Λ so zu wählen, daß $1/\Lambda$ von derselben Größenordnung wie der Pion-rms-Radius ist. Daher wird Λ im Folgenden gleich der Nukleonenmasse $M_N = 0.9389$ GeV oder gleich $(0.71)^{1/2}$ gesetzt. Der zweite Wert führt zu dem rms-Radius des Nukleons, d.h. 0.81 fm .

Diese Überlegungen zeigen, daß $|\delta m_{\pi B}|$ klein bleibt und nicht größer als 0.2 MeV sein wird.

B) Strahlungskorrekturen zu den baryonischen Beiträgen

Im vorhergegangenen Abschnitt wurde gezeigt, daß bei den Beiträgen zur Pion Massendifferenz, welche aus dem virtuellen Zerfall der Pionen in ein Baryonenpaar B_1 und $\bar{B}_2$ kommen, alle Terme sich proportional zum Quadrat der Abschn.-Masse Λ exakt wegheben.

Diese aus der SU3 Invarianz stammende Konsequenz kann bei Verletzung der SU3-Symmetrie im allgemeinen nicht erwartet werden. Weiter wurde gezeigt, daß sich die Terme für einen bestimmten Wert des Mischparameters $\hat{\alpha}$ proportional zu $\ln(\Lambda/M_0)$ vollständig wegheben (für $\hat{\alpha} \simeq 5/8$). Die el. mag. WW verletzt die SU3-Invarianz, so daß Strahlungskorrekturen zu den baryonischen Zerfällen einen erheblichen Beitrag zur Pion-Massendifferenz liefern könnten.

Die Strahlungskorrekturen zu den baryonischen Zerfällen sind in folgender Figur (Fig.6.3) dargestellt²².

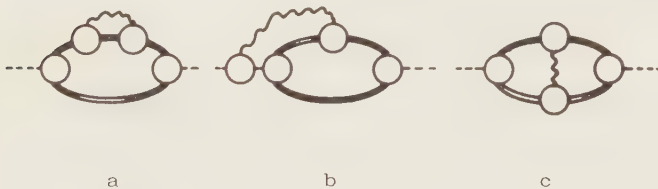


Fig. 6.3 Strahlungskorrekturen zu den baryonischen Zerfällen

Das erste Diagramm Fig. 6.3a beschreibt die Massenschiebung der virtuellen Baryonen, und ist deswegen in dem Prozeß ohne Strahlungskorrekturen, Fig.6.2, bereits enthalten.

Das zweite Diagramm (Fig. 6.3b) repräsentiert einen Term $\Delta_{\gamma B, B_2}$, der nur zur Masse der geladenen Pionen, nicht aber der ungeladenen, beiträgt. Entsprechend den verschiedenen Zerfallsarten (6.9) wird die Masse der geladenen Pionen folgendermaßen modifiziert:

$$Cm_{\pi^\pm} = \frac{g^2}{2\pi} \left\{ 2\Delta_{\gamma p n} + 2(1-\hat{\alpha})^2 \Delta_{\gamma \Xi^0 \Xi^-} + 4(1-\hat{\alpha})^2 \Delta_{\gamma \Sigma^+ \Sigma^-} + 4(1-\hat{\alpha})^2 \Delta_{\gamma \Sigma^0 \Sigma^-} + \frac{4}{3} \hat{\alpha}^2 (\Delta_{\gamma \Lambda \Sigma^-} + \Delta_{\gamma \Sigma^+ \Lambda}) \right\} / 2m_\pi \quad (6.20)$$

Das dritte Diagramm Fig. 6.3c beschreibt den SE-Term $\Delta_{B, \gamma B_2}$, der nur das neutrale Pion betrifft. Dabei sind nur solche Zerfallsarten von π^0 zu berücksichtigen, bei denen die Baryonen (entgegengesetzt) geladen sind. Mit den aus (6.9) entnommenen Gewichten erhält man dann für die modifizierte Masse des π^0 -s

$$Cm_{\pi^0} = \frac{g^2}{4\pi} \left\{ \Delta_{\gamma p p} + (1-\hat{\alpha})^2 \Delta_{\Xi^- \gamma \Xi^-} + 4(1-\hat{\alpha})^2 \Delta_{\Sigma^- \gamma \Sigma^-} + 4(1-\hat{\alpha})^2 \Delta_{\Sigma^+ \gamma \Sigma^+} \right\} / 2m_\pi \quad (6.21)$$

Wir sahen, daß die Diagramme ohne Strahlungskorrekturen von der Größenordnung m_π sind; daher vermuten wir, daß jeder dieser Terme (6.20) und (6.21) - die Strahlungskorrekturen enthalten - für sich von der Größenordnung

αm_π sind. Nach unserem Modell für die Vertices, Fig. 6.1, ist es leicht zu sehen, daß $Cm_{\pi^\pm}$ und Cm_{π^0} verschiedene Anteile proportional zu Λ haben, die sich nicht wegheben. Daher kann der Beitrag zur Massendifferenz

$$\delta m_{\pi \gamma B} = Cm_{\pi^\pm} - Cm_{\pi^0} \quad (6.22)$$

von der selben Größenordnung wie seine Bestandteile sein. Eine genaue Abschätzung von $\delta m_{\pi r B}$ liefert folgende Betrachtung:

Die Matrixelemente, die sich für $\Delta_{r B_1 B_2}$ und $\Delta_{B_1 r B_2}$ mit Hilfe der Ersatz-Vertices (Fig. 6.1) ergeben, sind

$$\Delta_{r B_1 B_2} = \frac{\alpha}{16 \pi^6} \int d^4 k \frac{d^4 \ell}{\ell^2} \frac{F_\pi(\ell^2) F_N(\ell^2) \sqrt{F_N(k^2)} \sqrt{F_N[(k+\ell)^2]}}{[(p-\ell)^2 - m_\pi^2] (k^2 - M_1^2) [(k+\ell)^2 - M_1^2]} \\ \frac{F_N[(k+\ell-p)^2]}{[(k+\ell-p)^2 - M_2^2]} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 (\not{k} + M_1) (\not{p} + \not{q}) (\not{k} + \not{\ell} + M_1) \right. \\ \left. \gamma_5 (\not{k} + \not{\ell} - \not{p} + M_2) \right\}, \quad (6.23)$$

wobei $q = p - l$, und

$$\Delta_{B_1 r B_2} = \frac{\alpha}{16 \pi^6} \int d^4 k \frac{d^4 \ell}{\ell^2} \frac{\sqrt{F_N(k^2)} \sqrt{F_N[(k+\ell)^2]} \sqrt{F_N[(k+\ell-p)^2]}}{(k^2 - M_1^2) [(k+\ell)^2 - M_1^2] [(p-k-\ell)^2 - M_2^2]} \\ \frac{\sqrt{F_N[(p-k)^2]}}{[(p-k)^2 - M_2^2]} F_N^2(\ell^2) \text{Tr} \left\{ \gamma_5 (\not{k} + M_1) \gamma_\mu (\not{k} + \not{\ell} + M_1) \right. \\ \left. \gamma_5 (\not{\ell} + \not{k} - \not{p} + M_2) \gamma^\mu (\not{k} - \not{p} + M_2) \right\}. \quad (6.24)$$

Folgende Vereinfachungen erleichtern unsere Abschätzung:

- i. Alle Baryonmassen und Abschn.-Massen der FFn werden gleich der Nukleonenmasse M gesetzt.
- ii. Die Pionmasse wird relativ zur Nukleonenmasse vernachlässigt.

Die gleichen Vereinfachungen wurden im vorigen Abschnitt auf $\delta m_{\pi B}$ angewendet und haben dort einen Fehler von $\lesssim 3\%$ verursacht. Für die gegenwärtige Betrachtung erwarten wir eine ähnliche Fehlerrate. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta_{rB, B_i} &= \frac{\alpha}{4\pi^6} M^{14} \int \frac{d^4 k d^4 \ell}{\ell^4 (\ell^2 - M^2)^3 (k^2 - M^2)^2} \\ &\quad \frac{k \cdot \ell}{[(k + \ell)^2 - M^2]^4} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi^2} M^2 B(1, 6) \int_0^1 dx (1-x)^4 F(4, 1; 7; 1-x(1-x)) \\ &= \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{0.06915}{6} M^2 = \Delta_{rBB} \quad (6.25)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Delta_{B, rB_z} &= \frac{\alpha}{\pi^6} M^{14} \int \frac{d^4 k d^4 \ell M^2}{\ell^2 (\ell^2 - M^2)^4 (k^2 - M^2)^3 [(k + \ell)^2 - M^2]^3} \\ &= \frac{\alpha}{\pi^2} \frac{B(2, 4) B(1, 7)}{B(3, 3)} \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 F(4, 1; 8; 1-x(1-x)) M^2 \\ &= \frac{\alpha}{\pi^2} \frac{3}{14} 0.0580 M^2 = \Delta_{B rB} \quad (6.26)\end{aligned}$$

In Formel (6.20) und (6.21) eingesetzt ergibt sich

$$Cm_{\pi^{\pm}} = \frac{g^2}{4\pi} 4(6 - 12\hat{\alpha} + \frac{28}{3}\hat{\alpha}^2)\Delta_{\gamma BB}/2m_{\pi} \quad (6.27)$$

$$Cm_{\pi^0} = \frac{g^2}{4\pi} (10 - 20\hat{\alpha} + 12\hat{\alpha}^2)\Delta_{B\gamma B}/2m_{\pi} \quad . \quad (6.28)$$

Folgende Tabelle (Tab. 6.3) zeigt die numerischen Resultate (in MeV) für einige realistische Werte des Mischungsparameters $\hat{\alpha}$ und die einheitliche Baryon- und Abschn.-Masse $M = 1$ GeV.

$\hat{\alpha}$	$Cm_{\pi^{\pm}}$	Cm_{π^0}	$\delta m_{\pi\gamma B}$
0.60	0.971	1.124	-0.153
0.625	0.96	1.06	-0.10 $\pm$ 0.1
0.66	0.96	0.98	-0.018
0.70	0.977	0.911	+0.066

Tab. 6.3 Die Massendifferenz $\delta m_{\pi\gamma B}$ in MeV

Der relative Fehler für die einzelnen Terme $Cm_{\pi^{\pm}}$ und Cm_{π^0} beträgt nur 3%. Dagegen wird der relative Fehler des Differenzausdrucks $\delta m_{\pi\gamma B} = Cm_{\pi^{\pm}} - Cm_{\pi^0}$ infolge der weitgehenden Kompensation wesentlich größer. Für $\hat{\alpha} = 5/8$ ergibt sich z.B. ein Fehler von 100%, falls wir für die Terme $Cm_{\pi^{\pm 0}}$ einen maximalen Fehler von 3% annehmen.

Die Terme $Cm_{\pi^{\pm}}$ und Cm_{π^0} sind erwartungsgemäß von der

Größenordnung 1 MeV. Der Beitrag zur Massendifferenz für die physikalischen Werte von $\hat{\alpha}$ ist nur wegen der Kompensation so klein.

Wir bemerken noch, daß in einer früheren Abschätzung von Ref. 22 $Cm_{\pi 0}$ als vernachlässigbar klein bezeichnet wird. Außerdem wird dort behauptet, daß $Cm_{\pi \pm}$ in den FFn, die $\delta m_{\pi B}$ beschreiben, schon enthalten sei. Beide Aussagen sind unrichtig. Unsere Abschätzung liefert die Größenordnung von $\delta m_{\pi \gamma B}$ bzw. dessen Wert mit 100% Fehler. Ein genauerer Wert für $\delta m_{\pi \gamma B}$ läßt sich nur bei einer wesentlich genaueren Kenntnis von $\hat{\alpha}$ und der verschiedenen Vertexfunktionen angeben.

c) Der $\pi^0 - \eta$ Übergang

Der Beitrag zur Massendifferenz von dem $\pi^0 - \eta$ Übergang (Fig. 6.4) wurde in der Literatur²³ schon betrachtet. Die SU3-Invarianz erlaubt für diese WW den Hamilton-Operator

$$H = m_{\pi\eta}^2 (\pi^0 \eta) \quad (6.29)$$

mit den Koppelungsmassen

$$m_{\pi\eta}^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} (m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2) \quad (6.30a)$$

und

$$m_{\pi\eta}^2 = -0.16 m_{\pi}^2 \quad , \quad (6.30b)$$

die aus der unitären Symmetrie abgeleitet werden²⁷.

Für den Fall (6.30b) erhalten die Autoren²³

$$\delta m_{\pi\eta} = 0.125 \text{ MeV} \quad . \quad (6.31)$$

Für den Fall (6.30a) ergibt unsere Berechnung

$$\delta m_{\pi\eta} = 0.097 \text{ MeV} \quad . \quad (6.32)$$

Der Beitrag aus diesem Prozeß ist relativ groß
(soweit die Größenordnung von $m_{\pi\eta}^2$ stimmt) und wirkt
den negativen baryonischen Beiträgen entgegen.



Fig. 6.4 Der π^0 - η Übergang

D) Schwere Zwischenzustände bei der Pion SE

Ein weiterer Beitrag zur Pion-Massendifferenz, der wegen der möglichen schweren Zwischenzustände bei der SE zustandekommt²⁴, wird durch folgendes Feynman-Diagramm dargestellt



Fig. 6.5 Pion SE mit schwerem Zwischenzustand

Hier (in Fig. 6.5) stellt V Vektormesonen dar. V können wir also durch ein ρ , ω oder φ -Meson ersetzen. Der Zwischenzustand mit dem ρ -Meson trägt zur Massendifferenz nichts bei, da das geladene Pion mit der selben Stärke wie das neutrale ~~wie~~ in ein ρ -Meson zerfällt. Also haben die Zerfälle $\pi^\pm \rightarrow \rho^\pm \gamma$ und $\pi^0 \rightarrow \rho^0 \gamma$ die gleiche Koppelung. Es tragen nur diejenigen Diagramme bei, in denen ein π^0 in ein ω oder ein φ -Meson zerfällt, während das $\pi^\pm$ keine entsprechenden Zerfallsmöglichkeiten aufweist. Der Zerfall des π^0 in ein Vektormeson (ω oder φ) wird durch folgenden WW-Operator beschrieben

$$L = G_V \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} (\partial^\nu A^\lambda) (\partial^\mu V^\tau) \pi^0 \quad . \quad (6.33)$$

Hier ist G_V die Koppelungskonstante. Wie man sich überzeugt, hat L die Form der einfachsten Koppelung zwischen zwei verschiedenen Vektorfeldern und einem pseudoskalaren Feld, so daß die Invarianz des Ausdrucks gegen Lorentz - und Paritäts-transformation gewährleistet ist.

Bezeichnen wir den ein- und auslaufenden Viererimpuls mit p , den Impuls des Photons mit k und den des Vektormesons mit $k' = p - k$, so bewirkt der WW-Operator L (6.33) im Feynman-Diagramm (Fig. 6.5) folgenden Vertexpausdruck

$$G_V \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} \hat{k}^\lambda \hat{k}'^\tau \quad . \quad (6.34)$$

Dieser Vertex muß noch mit einem "Formfaktor" $F_V(k^2)$ multipliziert werden. Für die unbekannte Funktion F_V wählen wir die plausible Darstellung

$$F_V(k^2) = (1 - k^2/s)^{-1}; \quad s = m_\rho^2, \quad (6.35)$$

welche die baryonische Struktur der WW berücksichtigt.

Bei Verwendung eines solchen Formfaktors zum Vertex (6.34) wird die WW außerdem renormierbar. Die SE, die dem Diagramm Fig. 6.5 entspricht, ist daher

$$\delta m_{V\rho}^2 = \frac{2i G_V^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{(p \cdot k)^2 - p^2 k^2}{k^2 [(p-k)^2 - m_V^2]} F_V^2(k^2) \quad . \quad (6.36)$$

Mit den üblichen Methoden der Feynman-Parametrisierung erhält man

$$\delta m_{V\rho}^2 = \frac{2i G_V^2}{(2\pi)^4} m_\rho^4 \Gamma(4) \int_0^1 y^2 dy \int_0^1 (1-x) dx \int \frac{[(p \cdot k)^2 - p^2 k^2] d^4k}{[k^2 - 2p \cdot x y k - m_\rho^2 y]^4} \quad (6.37)$$

In diesem Integral haben wir uns die Tatsache, daß

$$m_\varphi^2 - m_\pi^2 \approx m_\omega^2 - m_\pi^2 \approx m_\rho^2 \quad \text{gilt,} \quad (6.38)$$

schon zunutze gemacht.

Nachdem die k-Integration durchgeführt wurde,

$$\int d^4k \frac{(p \cdot k)^2 - p^2 k^2}{[k^2 - 2p \cdot x y k - m_\pi^2 y]^4} = \frac{1}{4} \frac{i\pi^2 m_\pi^2}{m_\pi^2 y^2 x^2 + m_\pi^2 y} \quad ; \quad p^2 = m_\pi^2 \quad (6.39)$$

(siehe dazu z.B. Ref. 17 S. 457) wird die x-Integration mit Hilfe folgender Formel *) berechnet

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} (x^\ell + \beta^\ell)^\nu dx = \beta^{\ell\nu} B(\lambda, \mu) x \quad (6.40)$$

$${}_3F_2\left(-\nu, \frac{\lambda}{\ell}, \frac{\lambda+1}{\ell}; \frac{\lambda+\mu}{\ell}, \frac{\lambda+\mu+1}{\ell}; -\frac{1}{\beta^\ell}\right).$$

*) ${}_pF_q$ ist eine hypergeometrische Funktion, die durch folgende Reihendarstellung definiert werden kann

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (6.40a)$$

Die zweite Parameterintegration wird mit der Integrationsformel

$$\int_0^1 (1-y)^{\mu-1} y^{\nu-1} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; ay) dy =$$

$$\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} {}_{p+1}F_{q+1}(\nu, a_1, \dots, a_p; \mu+\nu, b_1, \dots, b_q; a) \quad (6.41)$$

durchgeführt, und wir erhalten schließlich

$$\delta m_{\nu\gamma} = \frac{\delta m_{\nu\gamma}^2}{2m_\pi} = -\frac{3}{32\pi} \left(\frac{G_V^2}{4\pi}\right) m_s^2 m_\pi {}_4F_3\left(2, 1, 1, \frac{1}{2}; 3, 2, \frac{3}{2}; -\frac{m_\pi^2}{m_s^2}\right) \quad (6.42)$$

Zur Pion-Massendifferenz wird also ein zusätzlicher positiver Beitrag geliefert ($\delta m = \delta m_{\pi^+} - \delta m_{\pi^0}$).

Wegen $m_\pi^2 \ll m_s^2$ und

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; 0) = 1 \quad (6.42a)$$

wird die Massendifferenz einfach

$$\delta m_0 = -\delta m_{\nu\gamma} = \left(\frac{G_V^2}{4\pi}\right) \frac{3m_\pi}{64\pi} m_s^2 \quad (6.43)$$

Aus den neuesten Daten²¹ für die Zerfallsbreite

$$\Gamma(\omega \rightarrow \gamma + \pi^0) = 0.9 \text{ MeV} \quad (6.44)$$

erhalten wir für die Koppelungskonstante $(\Gamma_{\omega \rightarrow \pi \gamma} = \frac{(\frac{e}{4\pi})^2 K^3}{3})$;
 $K = 380 \text{ MeV}$)

$$G_{\omega}^2 = (0.774/\text{GeV})^2 \quad . \quad (6.45)$$

Die resultierende Massendifferenz ist damit

$$\delta m_0 = \delta m_{\omega \gamma} = 0.124 \text{ MeV} \quad . \quad (6.46)$$

Für die Massendifferenz $\delta m_{\varphi \gamma}$ erhalten wir lediglich

$$\delta m_{\varphi \gamma} = 0.0015 \text{ MeV} \quad . \quad (6.47)$$

Dies entsteht infolge des Verhältnisses

$$\frac{\Gamma(\varphi \rightarrow \gamma + \pi^0)}{\Gamma(\omega \rightarrow \gamma + \pi^0)} = 0.012 \quad . \quad (6.47a)$$

Der Beitrag zur Pion-Massendifferenz infolge virtueller Zerfälle in schwere Zwischenzustände wird also hauptsächlich von dem ω -Meson verursacht. Auch hier, wie in dem Fall des $\pi^0 \rightarrow \eta$ Übergangs, ist der Beitrag positiv.

E) Der Beitrag aus dem $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ - Zerfall

Da das π^0 in zwei Photonen zerfällt, existiert auch folgendes SE-Diagramm



Fig. 6.6 π^0 SE infolge des $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -Zerfalls

Die WW für den $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -Zerfall wird durch den Hamilton-Operator

$$H = 2G_{\gamma\rho}(\vec{E} \cdot \vec{H})\pi^0 \quad ; \quad G_{\gamma\rho} = 2.95 \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-1} \quad (6.48)$$

dargestellt. Dieser Operator produziert die Vertices

$$G_{\gamma\rho} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} k^\sigma k'^\tau, \quad (6.49)$$

welche die gleichen wie beim Zerfall in ein Photon und ein Vektormeson sind.

Auch hier muß der Vertex mit einer Strukturfunktion multipliziert werden und zwar mit einer Funktion

$$[F_V(k^2)F_V(k'^2)]^{1/2} \quad (6.50)$$

Wir verwenden hier denselben Formfaktor F_V (Gl. 6.35) wie vorher.

Die Berechnung der Massendifferenz wird in gleicher Weise wie im vorherigen Abschnitt durchgeführt.

Man erhält

$$\delta m_{\pi\gamma\gamma} = - G_{\gamma\gamma} \frac{3 m_{\pi} m_{\eta}^2}{64 \pi^2} = - 0.00023 \text{ MeV} \quad . \quad (6.51)$$

Der Beitrag aus dem $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -Zerfall kann also vollständig vernachlässigt werden.

F) Diskussion der nicht-el. mag. Beiträge

Aus den vorherigen Abschnitten entnimmt man, daß die Beiträge aus dem φ -Meson-Zwischenzustand (Absch. D) und dem $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -Zerfall (Absch. E) vernachlässigt werden können. Über die anderen nicht-el. mag. Beiträge kann eine entsprechende Aussage nicht ohne weiteres gemacht werden.

In Abschnitt A wurde gezeigt, daß $\delta_{m\pi B}$ zwischen $+0.076$ (0.104) MeV und -0.23 (-0.31) MeV liegt, wenn die Abschn.-Masse $\Lambda = (0.71)^{1/2}$ (0.939) GeV ist und der Mischparameter der SU3 zwischen $\hat{\alpha} = 0.60$ und $\hat{\alpha} = 0.70$ variiert. Die Strahlungskorrekturen zu den baryonischen Beiträgen $\delta_{m\pi B}$ liefern für dieselben $\hat{\alpha}$ -s einen Wert, der zwischen -0.153 und $+0.066$ MeV liegt. Diese beiden Beiträge zusammengenommen ergeben daher (für $\Lambda = M_N$ und ohne Betrachtung der Fehler) den minimalen Wert -0.244 MeV (für $\hat{\alpha} = 0.70$) und den maximalen Wert -0.049 MeV (für $\hat{\alpha} = 0.60$).

Der Beitrag aus dem $\pi^0 \rightarrow \eta$ Übergang (Absch. C) liefert den Wert $\delta_{m\pi\eta} = 0.125$ (bzw. 0.097) MeV, der zusammen mit $\delta_{m\omega\gamma} = 0.124$ MeV (Absch. D) den beträchtlichen positiven Beitrag 0.249 (bzw. 0.221) MeV ausmacht.

Alle nicht-el. mag. Beiträge zusammengenommen ergeben also $-0.02 \lesssim \delta_{m_{\text{had}}} \lesssim 0.2$ MeV. Eine genauere Angabe über $\delta_{m_{\text{had}}}$ wird nur dann möglich, wenn die Vertexfunktionen und Koppelungskonstanten der verschiedenen WWn besser bekannt sind.

7. DIE PION-MASSENDIFFERENZ ALS HOCHENERGIEEFFEKT

Es wurde gezeigt, daß nicht-el. mag. Beiträge zur Massendifferenz im Vergleich zum experimentellen Wert $\delta m_{\text{exp}} = 4.60 \text{ MeV}$ klein sind ($\delta m_{\text{had}} \lesssim 0.2 \text{ MeV}$). Der el. mag. Beitrag, der durch Gl. (5.3) dargestellt wird, liefert daher mehr als 95% des gesamten Beitrages, (5.3) kann deswegen als Integralgleichung für den Pion-FF betrachtet werden.

Um die Bedeutung dieser Integralgleichung besser zu verstehen, stellen wir die Frage, welche Bereiche des FF-s von dieser Beziehung besonders beeinflußt werden. Die nachfolgende Untersuchung zeigt, daß die el. mag. Massendifferenz (Gl. 5.3) hauptsächlich von dem Verhalten des FF-s für große raumartige Energie-Impulsüberträge $-t \gg \Lambda^2$ abhängig ist. Dabei ist Λ die Abschneidemasse, die von der Größenordnung der φ -Meson-Masse sein wird (φ -Dominanz). Um die Abhängigkeit der Massendifferenz von F_π zeigen zu können, führen wir die relativistisch invariante Abschneidefunktion

$$G_T(-t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{-1} \quad (7.1)$$

in den Integranden von (5.3) ein. Dadurch werden nämlich die Anteile, in denen $t \gg T$ ist, unterdrückt. Anstelle von (5.3) erhält man daher

$$\delta m_\pi^2 = \frac{\alpha}{\pi} 2m_\pi^2 \int_0^\infty dz F_\pi^2(-4m_\pi^2 z) G_T(-4m_\pi^2 z) [(1+z)^{3/2} z^{-1/2} - z]. \quad (7.2)$$

Dieser Ausdruck repräsentiert die partielle Massendifferenz, welche von dem elektrischen Feld außerhalb des Radius' $R = T^{-1/2}$ stammt.

Das Integral (7.2) kann nur dann berechnet werden, wenn wir für F_π ein explizites Modell wählen.

Da das asymptotische Verhalten des FF-s nicht genau bekannt ist, wählen wir für $F_\pi(t)$ eine Funktion, bei welcher das asymptotische Verhalten für große t durch einen Parameter eingestellt werden kann.

Das Modell

$$F_\pi(-t) = \left(1 + \frac{t}{\Lambda^2}\right)^{-\nu} \quad (7.3)$$

eignet sich für diesen Zweck, da es

1. ein variables asymptotisches Verhalten durch den Exponenten ν aufweist,
2. die notwendigen analytischen Eigenschaften (Kap. 2) besitzt
3. für den Spezialfall $\nu = 1$ und $\Lambda = m_\rho$ das bevorzugte ρ -Pol-FF-Modell darstellt.

Dieses Modell wird später noch genauer untersucht werden.

Das zu berechnende Integral (7.2) wird zur Vereinfachung in zwei Teilintegrale aufgespalten

$$\delta m_\pi^2 = \frac{\alpha}{\pi} 2m_\pi^2 (I_{T1} - I_{T2}) \quad (7.4)$$

mit

$$I_{T1} = \int_0^\infty dz (1+\beta z)^{-2\nu} \left(1 + \frac{1}{t} z\right)^{-1} (1+z)^{3/2} z^{-1/2} \quad (7.4a)$$

und

$$I_{T2} = \int_0^{\infty} dz z (1+\beta z)^{-2\nu} \left(1 + \frac{1}{\tau} z\right)^{-1} \quad (7.4b)$$

In (7.4a,b) ist

$$\beta = \frac{4 m_{\pi}^2}{\Lambda^2} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{T}{4 m_{\pi}^2} \quad (7.5)$$

Zunächst wird das zweite Teilintegral mit Hilfe der Formel

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} (1+x)^{\sigma} (1+\alpha x)^{\mu} dx = B(\lambda, -\mu-\sigma-\lambda) {}_2F_1(-\mu, \lambda; -\mu-\sigma; 1-\alpha) \quad (7.6)$$

berechnet, und man erhält nach der Substitution

$$x = \beta z$$

$$I_{T2} = \frac{1}{\beta^2} B(2, 2\nu-1) {}_2F_1\left(1, 2; 2\nu+1; 1-\frac{1}{\beta\tau}\right) \quad (7.7)$$

Zur Berechnung von I_{T1} ist es nützlich, zunächst die Substitution $z = (1-x)/x$ durchzuführen.

Mit Hilfe der Formel

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} (1-ux)^{-s} (1-vx)^{-\sigma} = B(\mu, \lambda) F_1(\lambda, s, \sigma, \lambda+\mu; u, v) \quad (7.8)$$

erhält man dann

$$I_{T1} = \beta^{-2\nu} \tau B\left(\frac{1}{2}, 2\nu-1\right) F_1\left(2\nu-1, 2\nu, 1, 2\nu-\frac{1}{2}; 1-\frac{1}{\beta}, 1-\tau\right) \quad (7.9)$$

Die hypergeometrische Funktion zweier Variablen F_1 läßt sich durch eine Doppelreihe darstellen

$$F_1(a, b_1, b_2, c; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_n}{(c)_{m+n} m! n!} x^m y^n, \quad (7.10)$$

welche der Konvergenzbedingung $|x| < 1$ und $|y| < 1$ unterliegt.

In den meisten Fällen wird die Reihe F_1 in I_{T1} dieser Konvergenzbedingung nicht genügen. Diese Schwierigkeit kann mit folgender Transformationsformel gemeistert werden

$$F_1(a, b, b_2, c; x, y) = (1-x)^{-b_1} (1-y)^{-b_2} F_1(c-a, b_1, b_2, c; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}) \quad (7.11)$$

Für die partielle Massendifferenz (7.4) erhält man mit (7.7), (7.9) und (7.11)

$$\delta m_T^2 = \delta m_T^2(\nu) = \frac{\alpha}{\pi} 2m_\pi^2 \left\{ B\left(\frac{1}{x}, 2\nu-1\right) \right. \\ \times \quad F_1\left(\frac{1}{x}, 2\nu, 1, 2\nu-\frac{1}{x}; 1-\beta, 1-\frac{1}{\tau}\right) \quad (7.12) \\ \left. - \frac{1}{\beta^2} B(2, 2\nu-1) {}_2F_1\left(1, x; 2\nu+1; 1-\frac{1}{\beta\tau}\right) \right\} .$$

Die partielle Massendifferenz enthält außer den Parametern β und τ auch den Parameter ν , der das asymptotische Verhalten von F_π zum Ausdruck bringt. Für $T = \infty$ wird die partielle Massendifferenz in die el. mag. (5.3), mit der speziellen Wahl des FF-s (7.3) übergehen. In diesem Grenzfall ($T \rightarrow \infty$) erhält man für die hypergeometrischen Funktionen:

$$F_1 \rightarrow F_1(1/2, 2\nu, 1, 2\nu-1/2; 1-\beta, 1)$$

und

$${}_2F_1 \rightarrow {}_2F_1(1, 2; 2\nu+1; 1) .$$

Es gilt außerdem

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (7.13)$$

und

$$F_1(a, b_1, b_2, c; x, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_2)} {}_2F_1(a, b_1; c-b_2; x) , \quad (7.14)$$

so daß man schließlich erhält

$$\begin{aligned} \delta m_{\infty}^2(\nu) &= \delta m_{em}^2(\nu) = \frac{\alpha}{\pi} 2m_{\pi}^2 \left\{ B\left(\frac{1}{2}, 2\nu-2\right) \right. \\ &\times {}_2F_1\left(2\nu, \frac{1}{2}; 2\nu - \frac{3}{2}; 1-\beta\right) \\ &\left. - \frac{1}{\beta^2} B(2, 2\nu-2) \right\} . \end{aligned} \quad (7.15)$$

Das Verhältnis zwischen der partiellen und der gesamten el. mag. Massendifferenz gibt uns darüber Aufschluß, ob die el. mag. Massendifferenz ein hoch- oder niederenergetischer Effekt ist. Zu diesem Zweck wird das Verhältnis $f(\xi) = \delta m_T^2(\nu) / \delta m_{\infty}^2(\nu)$ als Funktion von $\xi = r_{\pi} T^{1/2}$ für verschiedene Werte von ν berechnet. Die Variable ξ ist dimensionslos und charakterisiert die Abstände bzw. die energetischen Regionen des elektrischen Feldes um das Pion. Die Region $\xi > 1$ ($\xi < 1$) repräsentiert den hochenergetischen (niederenergetischen) Anteil des Feldes innerhalb (außerhalb) der Sphäre des mittleren quadratischen Radius r_{π} . Für das FF-Modell (7.3) ist der rms-Radius

$$r_{\pi} \equiv [6F_{\pi}(0)]^{1/2} = \frac{\sqrt{6\nu}}{\Lambda} . \quad (7.16)$$

Wegen der φ -Dominanz setzen wir $\Lambda = m_{\varphi}$ und ν in der Gegend von 1. Die Massendifferenzen $\delta m_T^2(\nu)$ und $\delta m_{em}^2(\nu)$ (Gln. 7.13 und 7.15) werden numerisch berechnet. Das Verhältnis zwischen diesen $f(\xi)$ ist in Fig. 7.1 für die Werte des Exponenten $\nu = 0.8, \nu = 1$

und $\nu = 1.2$ als Funktion von ξ aufgetragen.

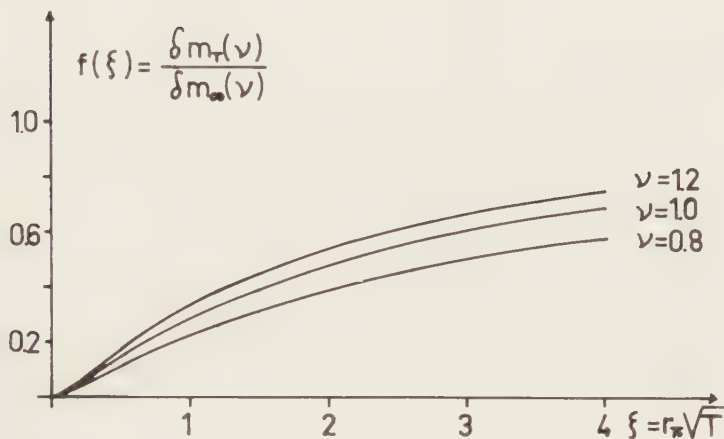


Fig. 7.1 Das Verhältnis der partiellen zur gesamten el. mag. Massendifferenz

Aus dieser Skizze kann entnommen werden, daß der Hauptbeitrag zur el. mag. Massendifferenz von der Hochenergieregion $\xi > 1$ stammt.

8. FORMFAKTORMODELLE

A) Das Schnittmodell (SM)

Als erstes wird ein FF-Modell untersucht, das ein allgemeines asymptotisches Verhalten aufweist. Bei jedem Modell muß darauf geachtet werden, daß die physikalischen Eigenschaften des Pion-FF-s durch das Modell ausgedrückt werden. Die analytischen Eigenschaften des Pion-FF-s werden durch die in Kap.2 aufgeführten Dispersionsbeziehungen festgelegt. Außerdem muß jedes Modell folgende Eigenschaften von F_π erfüllen:

- i) $\lim_{t \rightarrow \infty} F_\pi(t) = 0$
- ii) $F_\pi(0) = 1$
- iii) $\infty > r_\pi = \sqrt{6 F'_\pi(0)} \propto 1/\Lambda$
wobei Λ die sog. Abschneidemassee ist.

(8.1)

Aus den vielen Modellen, welche diese Bedingungen erfüllen, zeichnet sich eines dadurch aus, daß es ein allgemeines asymptotisches Verhalten aufweist und doch von einfacher und übersehbarer Gestalt ist. Dieses für viele Berechnungen geeignete Modell

$$F_\pi(t) = \left(1 - \frac{t}{\Lambda^2}\right)^{-\nu} ; \nu > 0 \quad (8.2)$$

nennen wir das Schnittmodell (SM).

Dieser Name drückt die Tatsache aus, daß bei $t \gg \Lambda^2$

die Funktion (8.2) einen Verzweigungsschnitt in der komplexen Ebene aufweist. Im Spezialfall $\nu = 1$ erhalten wir aus dem SM ein einfaches Polmodell.

Wegen der erforderlichen analytischen Eigenschaften muß der Pion-FF eine der äquivalenten Dispersionsbeziehungen (2.1), (2.2) oder (2.10) erfüllen.

Im folgenden wird gezeigt, daß das SM (8.2) die Dispersionsbeziehung (2.1) (in der unsubtrahierten Form) erfüllt. Es soll also gelten

$$F_{\pi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} dy \frac{\text{Im} F_{\pi}(-y)}{y+x-i\varepsilon}, \quad (2.1)$$

wobei $x = -t$.

Dazu wird der FF zunächst in einen Real- und Imaginärteil aufgespalten

$$F_{\pi}(t) = |F_{\pi}(t)| e^{i\delta(t)}. \quad (8.3)$$

Für das Modell (8.2) verschwindet die FF-Phase $\delta(t)$ für $t < \Lambda^2$, und für $t > \Lambda^2$ ist sie gleich $\pi\nu$. In den verschiedenen Bereichen von t gilt daher

$$F_{\pi}(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{\Lambda^2}\right)^{-\nu} & \text{für } t < \Lambda^2 \\ \left(\frac{t}{\Lambda^2} - 1\right)^{-\nu} & \text{für } t > \Lambda^2 \end{cases}. \quad (8.4)$$

Setzt man nun $x = -t$ und $\text{Im}F_{\pi}(-y) = (y/\Lambda^2 - 1)^{-\nu} \sin \pi \nu$ in das Integral (2.1) ein, so erhält man

$$F_{\pi}(x) = \frac{\sin \pi \nu}{\pi} (\Lambda^2)^{\nu} \int_{\Lambda^2 (\geq 4m_{\pi}^2)}^{\infty} dy (y+x)^{-1} (y-\Lambda^2)^{-\nu} \quad (8.5)$$

Mit Hilfe der Formeln

$$\int_u^{\infty} x^{-\lambda} (x+\beta)^{\nu} (x-u)^{\mu-1} dx = u^{\mu+\nu-\lambda} B(\lambda-\mu-\nu, \mu) \quad (8.6)$$

$$\times {}_2F_1(-\nu, \lambda-\mu-\nu; \lambda-\nu; -\frac{\beta}{u})$$

und

$$B(a, 1-a) = \pi / \sin \pi a \quad (8.7)$$

erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$F_{\pi}(x) = {}_2F_1(1, \nu; 1; -x/\Lambda^2) = (1+x/\Lambda^2)^{-\nu} \quad ; \quad x = -t \quad (8.8)$$

Bevor wir dieses SM mit den experimentellen Daten vergleichen und im Zusammenhang mit der Pion-Massendifferenz untersuchen, werden wir ein weiteres FF-Modell betrachten, das sich dadurch auszeichnet, daß es mögliche Resonanzzustände bei der $\pi\pi$ -Streuung wiedergibt.

B) Das Resonanzenmodell (RM)

In diesem Abschnitt wird ein FF-Modell untersucht, das die erforderlichen Bedingungen (8.1) erfüllt, die Dispersionsbeziehungen befriedigt und außerdem alle $\pi\pi$ -Resonanzen, die auftreten können, beschreibt.

Um die möglichen Resonanzen bei der $\pi\pi$ -Streuung richtig zu beschreiben, müssen hauptsächlich die Resonanzmassen und die Resonanzbreiten berücksichtigt werden. Vernachlässigt man die Breite, so wird die Resonanz durch einen Pol an der Stelle der Resonanzmasse dargestellt; die Berücksichtigung der Resonanzbreite dagegen kann auf verschiedene Art beschrieben werden.

Bei der Suche nach einem FF, der einerseits die Resonanzen richtig beschreibt und andererseits übersichtlich und nicht zu kompliziert ist, findet man folgendes Modell:

Das Resonanzenmodell (RM)

$$F_{\pi}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j \left(1 + \gamma_j \left[\frac{4m_{\pi}^2}{m_j^2}\right]^{1/2}\right)}{1 - \frac{t}{m_j^2} - i \gamma_j \left[\frac{t - 4m_{\pi}^2}{m_j^2}\right]^{1/2}} \quad (8.9)$$

Hier ist $\sum_{j=1}^n A_j = 1$, damit $F_{\pi}(0) = 1$ wird,

und n = Anzahl der Resonanzen,

m_j = j -te Resonanzmasse

Γ_j = j -te Resonanzbreite ; wobei $\Gamma_j = \gamma_j m_j$

Es ist leicht zu sehen, daß die Bedingungen i) und ii) in (8.1) erfüllt sind. Um zu zeigen, daß auch Bed. iii) erfüllt ist, berechnen wir den mittleren quadratischen Radius r_π .
Es ist

$$F'_\pi(t) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j \left(1 + \frac{2m_\pi \gamma_j}{m_j}\right) \left(\frac{1}{m_j^2} + \frac{i\gamma_j}{2m_j} [t - 4m_\pi^2]^{-1/2}\right)}{\left(1 - \frac{t}{m_j^2} - \frac{i\gamma_j}{m_j} \sqrt{t - 4m_\pi^2}\right)^2} \quad (8.10)$$

und daher

$$F'_\pi(0) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{m_j^2} \frac{1 + \frac{\Gamma_j}{4m_\pi}}{1 + \frac{2m_\pi \Gamma_j}{m_j^2}} \quad (8.11)$$

Für den rms-Radius erhalten wir damit

$$r_\pi = \left\{ 6 \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{m_j^2} \frac{1 + \frac{\Gamma_j}{4m_\pi}}{1 + \frac{2m_\pi \Gamma_j}{m_j^2}} \right\}^{1/2} \quad (*) \quad (8.12)$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß (8.9) die erforderlichen analytischen Eigenschaften besitzt. Dazu wird gezeigt, daß auch dieses Modell die unsubtrahierte Dispersionsbeziehung (2.1) befriedigt.

*) Somit ist r_π endlich und von der Größenordnung der gemittelten reziproken Resonanzmasse.

Zur Berechnung des Dispersionsintegrals genügt es, einen Term der Summe (8.9) zu untersuchen, da alle entstehenden konvergenten Teilintegrale die gleiche Gestalt haben.

Der Imaginärteil der Funktion

$$F(t) = \frac{1 + \gamma \sqrt{\frac{4m_\pi^2}{m^2}}}{1 - \frac{t}{m^2} - i\gamma \sqrt{\frac{t - 4m_\pi^2}{m^2}}} \quad (8.13)$$

wird in den Integranden von (2.1) eingesetzt, und es wird untersucht, ob $F(t)$ diese Dispersionsbeziehung befriedigt.

Aus der Gleichung

$$F(t) = \frac{\left(1 + \frac{2\gamma m_\pi}{m}\right) \left[\left(1 - \frac{t}{m^2}\right) + i\gamma \sqrt{\frac{t - 4m_\pi^2}{m^2}}\right]}{\left(1 - \frac{t}{m^2}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{t - 4m_\pi^2}{m^2}\right)} \quad (8.14)$$

entnimmt man $\text{Im}F(t)$. In (2.1) eingesetzt, ergibt sich die Bedingung, daß

$$F(x) \stackrel{!}{=} \frac{\gamma \left(1 - \frac{2\gamma m_\pi}{m}\right)}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{dy' \sqrt{\frac{y' - 4m_\pi^2}{m^2}}}{(y' + x) \left[\left(1 - \frac{y'}{m^2}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{y' - 4m_\pi^2}{m^2}\right)\right]} \quad (8.15)$$

sei, wobei $x = -t$. Zur Berechnung der rechten Seite der Gleichung substituieren wir $y = (y' - 4m_\pi^2)/m^2$ und

setzen $C = \gamma(1 + \gamma(4m_{\pi}^2/m^2)^{1/2})/\pi$, $x' = x + 4m_{\pi}^2$,
 $b = 1 - 4m_{\pi}^2/m^2$ und erhalten

$$F(x) \stackrel{!}{=} C \int_0^{\infty} dy \sqrt{y} \left(y + \frac{x'}{m^2}\right)^{-1} [(y-b)^2 + \gamma^2 y]^{-1} \quad (8.16)$$

Die Ausführung der Integration kann weiter vereinfacht werden, indem wir $\Delta \equiv \gamma^2/2 - b$ definieren und für den einen der beiden Nennerausdrücke

$$[(y-b)^2 + \gamma^2 y]^{-1} = \frac{1}{2}(\Delta^2 - b^2)^{-1/2} \left\{ [y + \Delta - \sqrt{\Delta^2 - b^2}]^{-1} - [y + \Delta + \sqrt{\Delta^2 - b^2}]^{-1} \right\} \quad (8.17)$$

schreiben.

Mit Hilfe der Formel

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1/2} (x+a)^{-\mu} (x+b)^{-\mu} dx = \sqrt{\pi} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{1-2\mu} \frac{\Gamma(\mu-1/2)}{\Gamma(\mu)} \quad (8.18)$$

erhält man dann

$$F(x) = \frac{\pi C}{2\sqrt{\Delta^2 - b^2}} \frac{\sqrt{\Delta + \sqrt{\Delta^2 - b^2}} - \sqrt{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - b^2}}}{[\sqrt{x/m^2} + \sqrt{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - b^2}}][\sqrt{x/m^2} + \sqrt{\Delta + \sqrt{\Delta^2 - b^2}}]} \quad (8.19)$$

Der rechts stehende Ausdruck ist in der Tat mit $F(-t)$ in (8.13) identisch. Das kann folgendermaßen verifiziert werden:

Für den Wurzelterm schreibe man

$$\sqrt{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - b^2}} = \sqrt{\Delta} \sqrt{(\alpha \pm \sqrt{\beta})^2} \quad , \text{ so daß}$$

$$\alpha^2 + \beta = 1 \quad , \quad 2\alpha\sqrt{\beta} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{\Delta^2}} \quad \text{und daher}$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{\Delta}\right) \quad , \quad \beta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{\Delta}\right) \quad .$$

In (8.19) eingesetzt ergibt

$$F(x) = \frac{\pi C}{2\alpha\sqrt{\Delta}} \left[\frac{x'}{m^2} + 2\alpha\sqrt{\Delta}\sqrt{\frac{x'}{m^2}} + \Delta(\alpha^2 - \beta) \right]^{-1} \quad . \quad (8.20)$$

Da $\Delta(\alpha^2 - \beta) = b = 1 - 4m_\pi^2/m^2$,

$$4\alpha^2\Delta = \delta^2 \quad (\Delta = \delta^2/2 - b), \quad x' = x + 4m_\pi^2$$

und $C = \frac{\delta}{\pi} \left(1 + \delta\sqrt{\frac{4m_\pi^2}{m^2}}\right)$

erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$F(x) = \frac{1 + \delta\sqrt{\frac{4m_\pi^2}{m^2}}}{1 + \frac{x}{m^2} + \delta\sqrt{\frac{x + 4m_\pi^2}{m^2}}} \quad ; \quad F(t) = F(-x) \quad . \quad (8.21)$$

Man sieht nun unmittelbar, daß auch die Funktion (8.9) die Dispersionsbeziehung erfüllt, da sie eine Summe von Ausdrücken der Form (8.13) ist.

Damit ist schließlich gezeigt, daß das RM die geforderten physikalischen Eigenschaften besitzt.

9. BESTIMMUNG DES RM-S DURCH DIE EXPERIMENTELLEN

MESSDATEN

Das RM (8.9) wurde so gewählt, daß es die möglichen $\pi\pi$ -Resonanzen wiedergeben kann. Es soll aber möglichst bei geeigneter Wahl seiner Parameter die Daten von $F_{\pi}(t)$ in allen Bereichen von t ebenfalls wiedergeben. Die Parameter des RM-s können durch folgende experimentelle Daten bestimmt werden:

- 1.) Daten über die $\pi\pi$ -Streuphase⁸⁻¹⁰
- 2.) Daten über $|F_{\pi}(t)|$ im zeitartigen Bereich von t ¹¹
- 3.) Daten über $F_{\pi}(t) = |F_{\pi}(t)|$ im Streubereich⁶ $t < 0$

Von den $\pi\pi$ -Resonanzen ist die ϱ -Resonanz am deutlichsten und genauesten bekannt. Sie wird bei der Bestimmung von $|F_{\pi}(t)|$ ($t > 0$) direkt gemessen. Wir werden daher zunächst diese Meßdaten untersuchen.

A) Das RM und $|F_{\pi}(t)|$ im zeitartigen Bereich $t > 0$

Zur Bestimmung der Parameter in dem RM ist es zweckmäßig, zunächst nur die genauesten Meßdaten zu betrachten. Danach wird sich herausstellen, daß auch die weniger genauen Meßdaten zum größten Teil mit dem Modell verträglich sind.

Am genauesten wurde $|F_{\pi}(t)|$ im Bereich der ϱ -Resonanz

$$0.64 \leq t^{1/2} \leq 0.99 \text{ GeV}$$

gemessen (Fig. 4.4) . Diese Meßdaten werden durch das RM wiedergegeben bei folgender Wahl der Parameter:

i) Die Resonanzmassen

$$m_1 = m_g = 0.77 \pm 0.01 \text{ GeV}$$

und

$$m_j > m_g \quad \text{für } j \geq 2 \quad (9.1)$$

ii) Die Resonanzbreiten

$$\Gamma_1 = \Gamma_g = 0.13 \pm 0.03 \text{ GeV}$$

und

$$\Gamma_j < m_g \quad \text{für } j \geq 2 \quad (9.2)$$

iii) Die Gewichte

$$A_1 = A_g = 0.85 \pm 0.15$$

und

$$\sum_{j=2}^n A_j \leq 0.3 \quad ; \quad \sum_{j=1}^n A_j = 1 \quad \text{für } n \geq 1 \quad (9.3)$$

Es ist deutlich zu sehen, daß die g -Resonanz über die möglichen restlichen Resonanzen dominiert (g -Dominanz) hauptsächlich wegen des großen Gewichtes A_g .

Die Parameter (9.1) - (9.3) lassen sich durch die

δ_{11} -Phasendaten weiter einschränken.

B) Das RM und die Phase $\delta_{11}(t)$

Es wurde bereits darauf hingewiesen (Kap. 3), daß die $\pi\pi$ -Streuphase $\delta_{11}(t)$ gleich der FF-Phase $\delta(t)$ für $4m_\pi^2 \leq t < 16m_\pi^2$ ist; außerdem ist es anzunehmen, daß sich diese Phasen auch für $t \geq 16m_\pi^2$ kaum unterscheiden werden. Die Meßergebnisse der δ_{11} -Phase können daher auf die Phase des FF-s übertragen werden.

Für $0.6 \leq t^{1/2} \leq 1.9$ GeV wurde δ_{11} in großer Genauigkeit gemessen¹⁰ (Fig. 4.5). In diesem Meßbereich sind zwei Resonanzen deutlich zu erkennen; die ρ -Resonanz in der Gegend von 0.775 GeV und eine weitere, die ρ' -Resonanz, bei 1.65 GeV.

Um das RM (8.9) an die Meßdaten anzupassen, berechnen wir zunächst die Phase von $F_\pi^R(t) \equiv (8.9)$

$$\delta^R(t) = \frac{1}{2i} \left[\ln F_\pi^R(t) - \ln F_\pi^{R*}(t) \right] = \arctg \left(\frac{\text{Im} F_\pi^R(t)}{\text{Re} F_\pi^R(t)} \right)$$

$$= \arctg \frac{\sum_{j=1}^n \frac{A_j \Gamma_j}{m_j^2} \frac{\left(1 + \frac{2m_\pi \Gamma_j}{m_j^2}\right) \sqrt{t - 4m_\pi^2}}{\left(1 - \frac{t}{m_j^2}\right)^2 + \Gamma_j^2 \frac{t - 4m_\pi^2}{m_j^4}}}{\sum_{j=1}^n \frac{A_j \left(1 + \frac{2m_\pi \Gamma_j}{m_j^2}\right) \left(1 - \frac{t}{m_j^2}\right)}{\left(1 - \frac{t}{m_j^2}\right)^2 + \Gamma_j^2 \frac{t - 4m_\pi^2}{m_j^4}}} \quad (9.4)$$

Zur Vereinfachung setzen wir zunächst $A_j = 0$ für alle $j \geq 3$ d.h., wir betrachten nur die g und g' -Resonanz.

Den "besten" Fit bekommt man dann bei folgender Wahl der Parameter³⁰:

$$m_1 = m_g = 0.777 \text{ GeV}, \quad \Gamma_1 = \Gamma_g = 0.147 \text{ GeV}$$

$$m_2 = m_{g'} = 1.680 \text{ GeV}, \quad \Gamma_2 = \Gamma_{g'} = 0.095 \text{ GeV}$$

und

$$A_1 = A_g = 0.993, \quad A_2 = A_{g'} = 0.007 \quad (9.5)$$

Falls sich weitere Resonanzen in diesem Bereich von t befinden sollten, müssen sie in der Nähe der g -oder g' -Masse sein.

Der Fit mit den Parametern (9.5) ist sehr gut (im Rahmen der experimentellen Genauigkeit) bis auf den Wert von $\delta(t)$ in dem Gebiet $0.8 \leq t^{1/2} \leq 1.0 \text{ GeV}$, wie aus Fig. 9.1 zu entnehmen ist.

Durch Einführung einer weiteren Resonanz in das RM kann eine bessere Übereinstimmung, insbesondere für $t^{1/2} \approx 0.9 \text{ GeV}$ erreicht werden. Es stellt sich heraus, daß wir mit folgenden Parametern die δ_{11} -Phase sehr gut anpassen können:

$$m_g = 0.775 \text{ GeV} \quad \Gamma_g = 0.15 \text{ GeV} \quad A_g = 0.96$$

$$m_{g'} = 1.68 \text{ GeV} \quad \Gamma_{g'} = 0.095 \text{ GeV} \quad A_{g'} = 0.007$$

$$m_3 = 0.95 \text{ GeV} \quad \Gamma_3 = 0.15 \text{ GeV} \quad A_3 = 0.033 \quad . \quad (9.6)$$

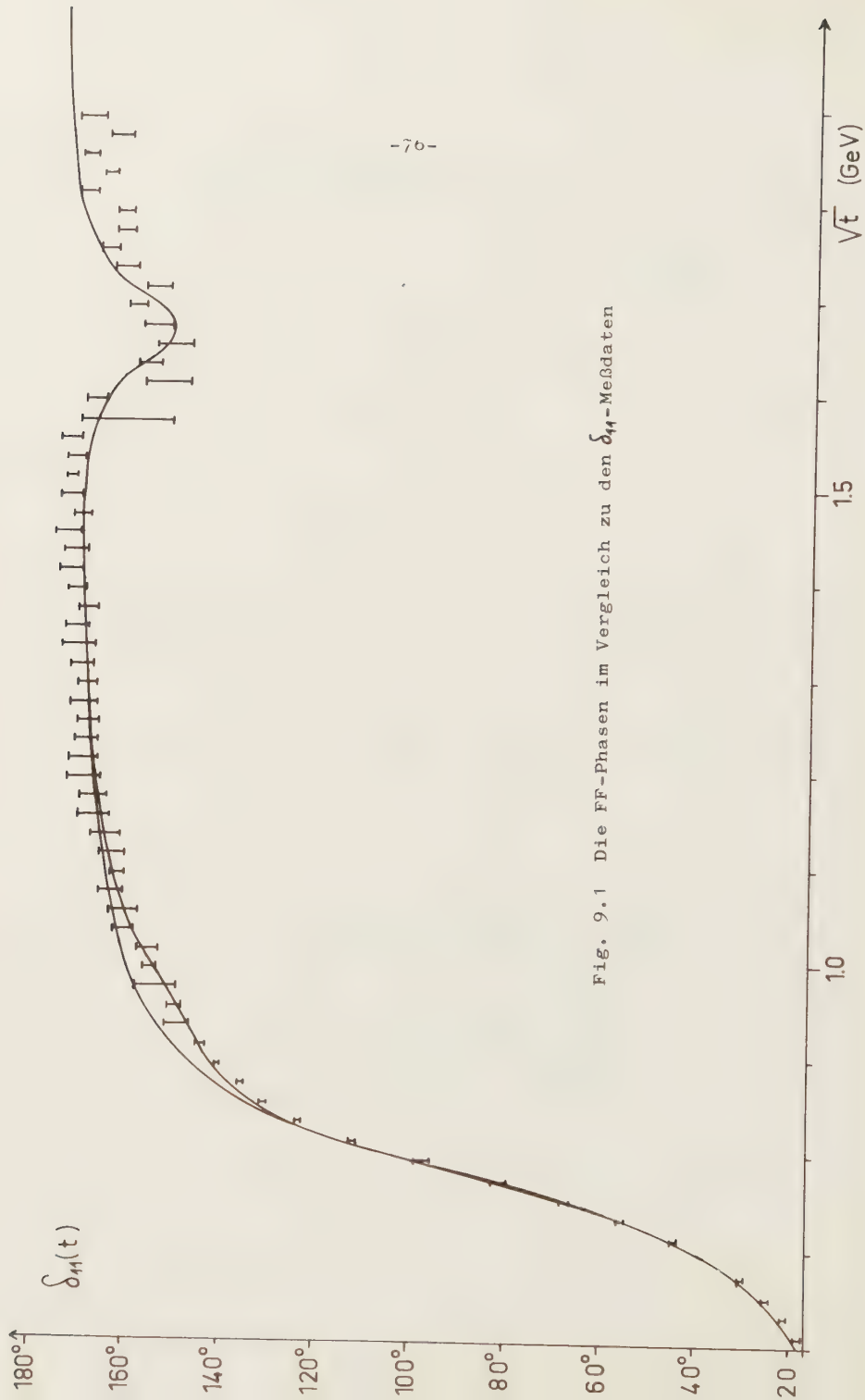


Fig. 9.1 Die FF-Phasen im Vergleich zu den δ_{11} -Meßdaten

Diese Parameter dienen eigentlich der Anpassung der FF-Phase an δ_{11} , können aber auch auf die Existenz einer dritten $\pi\pi$ -Resonanz hinweisen. Die ρ -Resonanz ist mehrfach gemessen und aus physikalischen Gründen in das RM eingeführt worden. Auch die ρ' -Resonanz ist gesichert, wie z.B. aus den Messungen der Reaktion $e^+e^- \rightarrow 4\pi$ zu entnehmen ist³¹. Dagegen wurde eine Resonanz bei $m_3 = 0.95$ GeV nicht gemessen. Die Messung einer solchen Resonanz ist schwierig, da sie von der ρ -Resonanz "überdeckt" wird.

Das RM mit diesen Parametern kann jetzt mit den experimentellen Daten von $|F_\pi(t)|$ für $t > 0$ verglichen werden. In Fig. 9.2 ist dieser Vergleich für das RM mit den Parametern (9.6) veranschaulicht worden.

Abgesehen von fünf Meßdaten der Gruppe M. Bernardini et al. (CERN 1973; Ref. 11) stimmen alle Meßwerte mit dem RM überein.

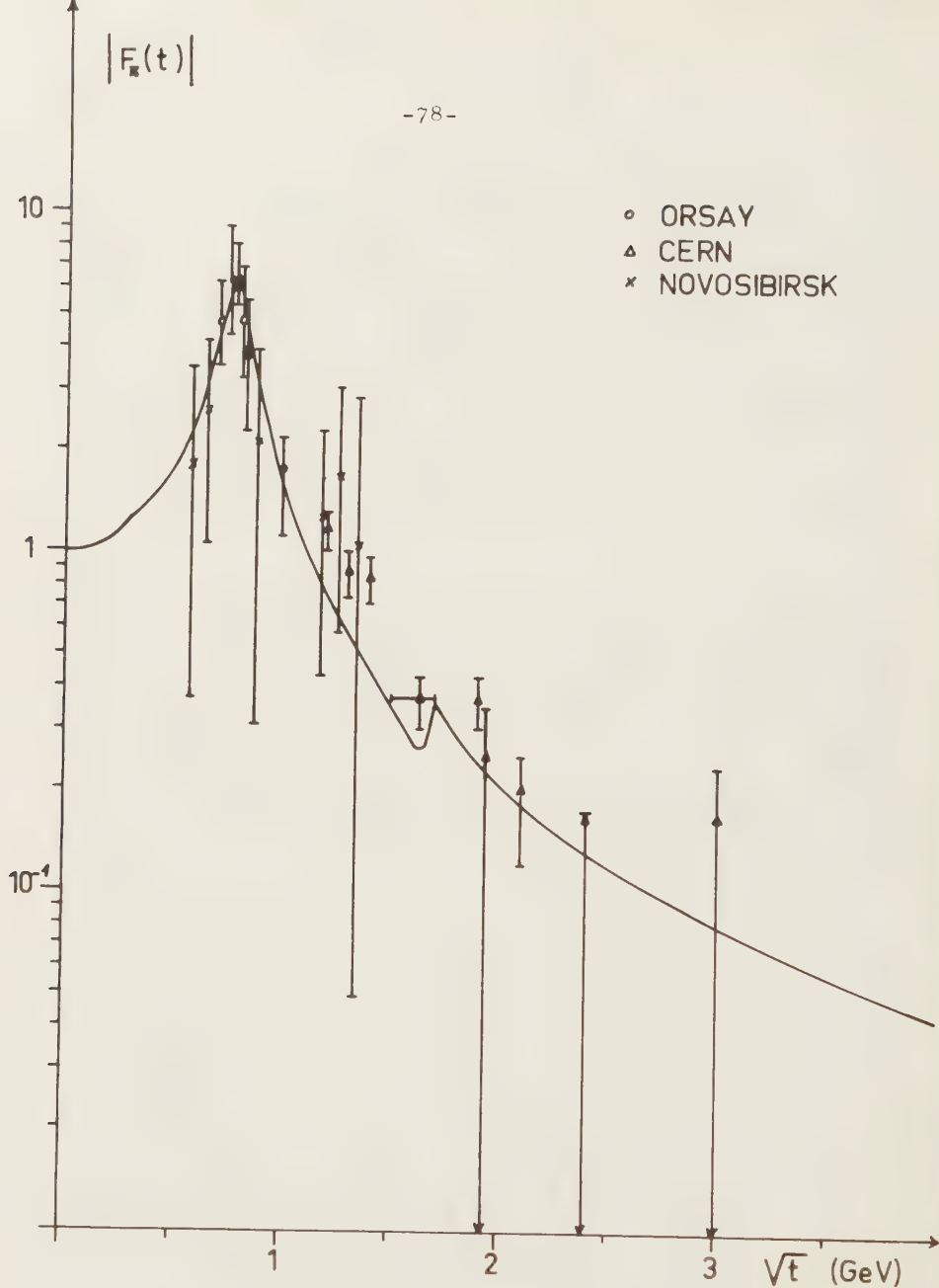


Fig. 9.2 Betrag des RM-s $|F_{\pi}^R(t)|$ mit den Parametern (9.6) im Vergleich zu den Meßdaten¹¹ von $|F_{\pi}(t)|$ im Erzeugungsbereich $t > 0$

C) Das RM im raumartigen Bereich $t < 0$

Für $t < 0$ unterscheidet sich das RM mit den Parametern (9.5) von dem mit den Parametern (9.6) nur sehr wenig.

In folgender Skizze ist $[F_{\pi}^R(t)]^2$ mit den Parametern (9.6) für $-t \leq 0.04 \text{ GeV}^2$ mit den experimentellen, durch π -e -Streuung gewonnenen Daten²⁵ verglichen.

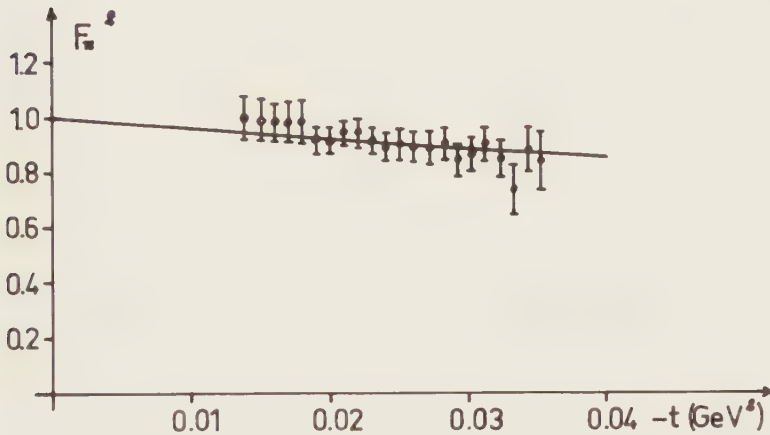
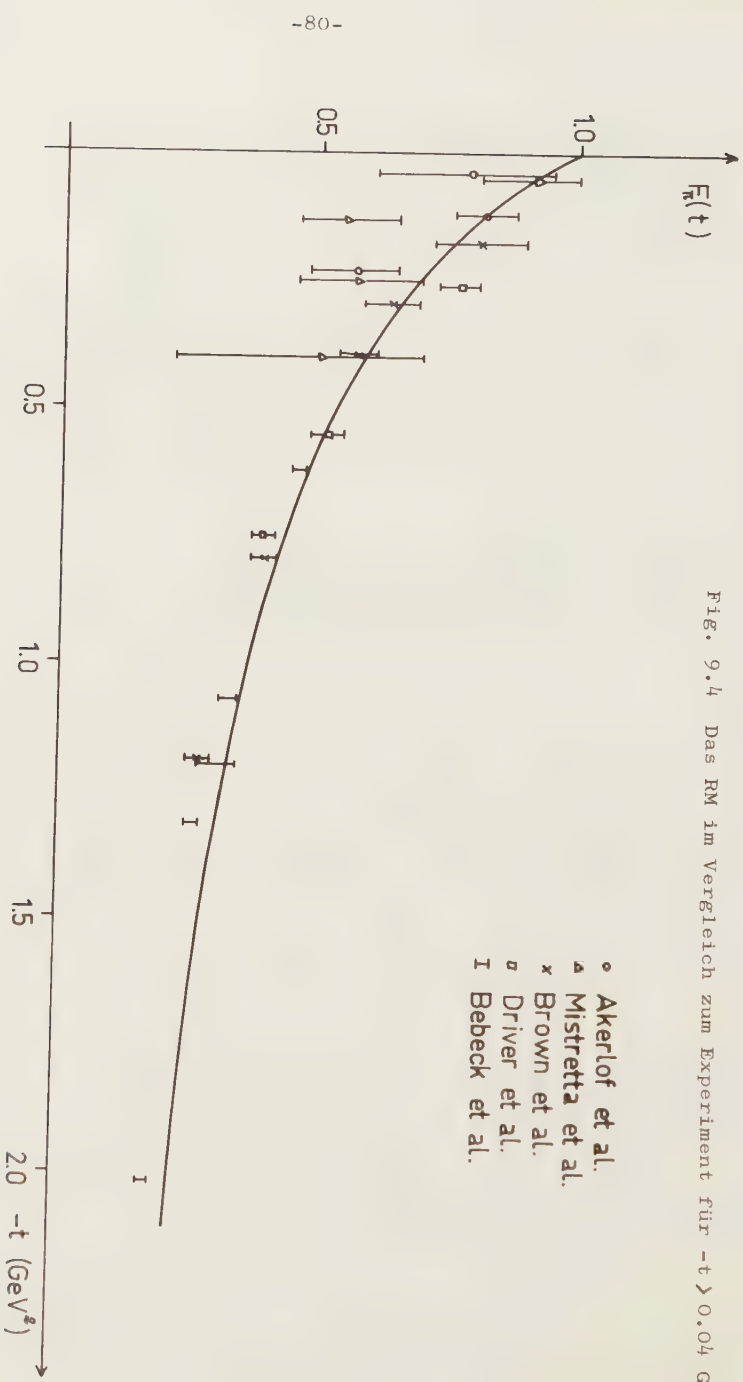


Fig. 9.3 Das RM im Vergleich zum Experiment für $-t \leq 0.04 \text{ GeV}^2$

Der rms-Radius, der proportional zu der Tangente des F_{π} -s an der Stelle $t = 0$ ist, kann durch Extrapolation der Meßdaten bis zu $F_{\pi}(0) = 1$ angegeben werden.

Adylov und Mitarbeiter (Ref. 25) erhalten auf diese Weise den Wert

$$r_{\pi} = 0.78 \pm 0.10 \text{ fm} \quad . \quad (9.7)$$



- Akerlof et al.
- △ Mistretta et al.
- × Brown et al.
- Driver et al.
- | Bebeck et al.

Fig. 9.4 Das RM im Vergleich zum Experiment für $-t > 0.04 \text{ GeV}^2$

Der rms-Radius des RM-s r_{π}^R für den die Formel (8.2) gilt, errechnet sich mit den Parametern (9.5) bzw. (9.6) zu

$$r_{\pi}^R = 0.675 \text{ fm} \quad \text{bzw.} \quad r_{\pi}^R = 0.674 \text{ fm} \quad . \quad (9.8)$$

Aus Fig. 9.3 ist ersichtlich, daß das RM mit den Parametern (9.6) die Daten sehr gut nähert. Der von Adylov et al. auf Grund derselben Daten angegebene Wert von r_{π} scheint deshalb - ungerechtfertigterweise - zu groß zu sein.

Außerdem stimmt der Wert von r_{π}^R (Gl. 9.8) mit dem zuletzt angegebenen experimentellen Wert³²

$$r_{\pi} = 0.71 \pm 0.05 \text{ fm} \quad . \quad (9.9)$$

gut überein.

Es sei noch bemerkt, daß r_{π}^R mit dem Wert $r_{\pi} \approx 0.65 \text{ fm}$, der teilweise aus theoretische Erwägungen stammt²⁶, verträglich ist.

Der Formfaktor F_{π}^R mit den Parametern (9.6) wurde in Fig. 9.4 auch mit den experimentellen Daten verglichen, welche durch Extrapolation aus Messungen der Elektroproduktion von Pionen gewonnen wurden und bis zu 2 GeV^2 reichen. Die Figur beweist gute Übereinstimmung für $-t < 1.2 \text{ GeV}^2$. Für $-t \gg 1.2 \text{ GeV}^2$ liegt F_{π}^R etwas über den Daten. Dieser Umstand gefährdet die Richtigkeit des Modells jedoch nicht, wenn man bedenkt, daß die Daten teilweise ohne Abschätzung der durch die Extrapolation bedingten systematischen Fehler angegeben wurden.

10. BESTIMMUNG DES SM DURCH DIE MESSDATEN

Das SM (8.2) kann die feinen Züge des FF-s infolge diverser Resonanzen nicht wiedergeben. Dagegen eignet es sich besonders zur Untersuchung des Verhaltens des FF-s im asymptotischen Bereich, d.h., für $|t| \gg 2 \text{ GeV}^2$.

Aus den vorhandenen experimentellen Daten kann das asymptotische Verhalten des FF-s nicht bestimmt werden, da die Messungen nur bei relativ kleinen Werten von $|t|$ durchgeführt wurden.

Eine Einschränkung der Parameter des SM-s durch die vorhandenen Meßdaten ist jedoch möglich, wie im folgenden gezeigt wird.

A) Das SM im raumartigen Bereich $t < 0$

Im Bereich $0 < -t \lesssim 2 \text{ GeV}^2$ können die Meßdaten mit verschiedenen Parameterpaaren angepaßt werden.

In Fig. 10.1 und Fig. 10.2 sind z.B. die Parameterpaare

$$\begin{array}{ll} \nu = 1.5 & \Lambda = 0.984 \text{ GeV} \\ \nu = 1.25 & \Lambda = 0.84 \text{ GeV} \\ \nu = 0.75 & \Lambda = 0.545 \text{ GeV} \end{array} \quad (10.1)$$

mit den Meßdaten verglichen.

Die beste Übereinstimmung für $-t > 0.04 \text{ GeV}^2$ (Fig. 10.1) erhält man mit dem Parameterpaar (1.5, 0.984) .

Im Bereich $0 < -t \lesssim 0.04 \text{ GeV}^2$ dagegen (Fig. 10.2) findet die beste Übereinstimmung mit dem Paar (0.75, 0.545) statt.

Fig. 10.1 Das SM im Bereich $-t > 0.04 \text{ GeV}^2$



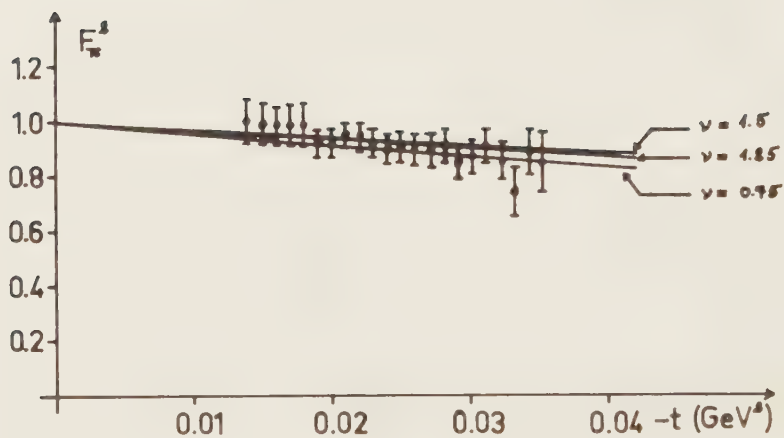


Fig. 10.2 Das SM für $0 < -t \leq 0.04 \text{ GeV}^2$

Das Parameterpaar (1.25, 0.84) ist mit den Meßdaten in beiden Bereichen verträglich.

Der aus den Parameterpaaren (10.1) resultierende rms-Radius

$$r_{\pi}^s = \begin{cases} 0.60 \text{ fm} & \text{für das Paar mit } \nu = 1.5 \\ 0.64 \text{ fm} & \text{für das Paar mit } \nu = 1.25 \\ 0.77 \text{ fm} & \text{für das Paar mit } \nu = 0.75 \end{cases} \quad (10.2)$$

kann keinen Aufschluß über das Verhalten des SM -s geben, da er lediglich die Tangente des FF-s an der Stelle $t = 0$ wiedergibt.

Im zeitartigen Bereich $t > 0$ werden die Meßdaten (von δ_{11} und $|F_{\pi}|$) durch das SM mit dieser Wahl der Parameter nicht wiedergegeben.

Falls der Pion-FF sich im Streubereich auch für $-t \gg 2 \text{ GeV}^2$ weiter so verhält, d.h., ein wesentlich stärkeres bzw. schwächeres Abfallen als t^{-1} aufweist, haben wir keine plausible Erklärung dafür.

Falls aber der Exponent ν sich nur wenig von 1 unterscheidet, ist eine Interpretation des SM-s, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, möglich.

B) Das SM mit Breite als Pauschalierung
von $\pi\pi$ -Resonanzen

Es kann gezeigt werden, daß das SM als Pauschalierung aller $\pi\pi$ -Resonanzen interpretiert werden kann.

Dazu muß das Modell mit den Meßdaten im Erzeugungsbereich $t > 0$ verglichen werden.

In der Form (8.2) kann das SM nur in groben Zügen mit den Daten (δ_{11} und $|F_\pi|$) im zeitartigen Bereich $t > 0$ verglichen werden, da an der Stelle $t = \Lambda^2$ eine Singularität auftritt.

Durch Einführung einer Resonanzbreite Γ in (8.2) wird diese Schwierigkeit überwunden.

Das SM ohne Breite $F_\pi^S(t)$ wird durch

$$F_\pi^{SB}(t) = \left[\frac{1 + \frac{2m_\pi \Gamma}{\Lambda^2}}{1 - \frac{t}{\Lambda^2} - i \frac{\Gamma}{\Lambda^2} \sqrt{t - 4m_\pi^2}} \right]^\nu \quad (10.3)$$

ersetzt.

Das so modifizierte SM mit Resonanzbreite (SMmB) erfüllt die Omnès-Darstellung des FF-s (2.10) und die erforderlichen Bedingungen (8.1), wie durch eine Rechnung explizit gezeigt werden kann^{*)}. Die Phase des SMmB (10.3)

$$\delta^{SB}(t) = \frac{\nu}{2i} \left[\ln F_\pi^{SB}(t) - \ln F_\pi^{SB*}(t) \right] = \nu \arctg \frac{\Gamma \sqrt{t - 4m_\pi^2}}{\Lambda^2 - t}, \quad (10.4)$$

^{*)} Der Nachweis wird hier nicht vorgeführt.

Er verläuft ähnlich wie derjenige, welcher für das RM erbracht wurde.

die zur Phase δ_{11} angepaßt werden sollen, muß die Masse und Resonanzbreite des ρ -Mesons wiedergeben. Der Exponent ν muß so gewählt werden, daß die FF-Phase alle weiteren Resonanzen pauschaliert, wobei es auch unendlich viele Resonanzen sein können. In folgender Skizze (Fig. 10.3) ist $\delta^{\text{SB}}(t)$ mit den Parametern

$$\nu = \nu_{\text{exp}} = 0.960$$

$$\mathcal{M} = m_{\rho} = 0.773 \text{ GeV}$$

$$\Gamma = \Gamma_{\rho} = 0.14 \text{ GeV}$$

(10.5)

aufgetragen.

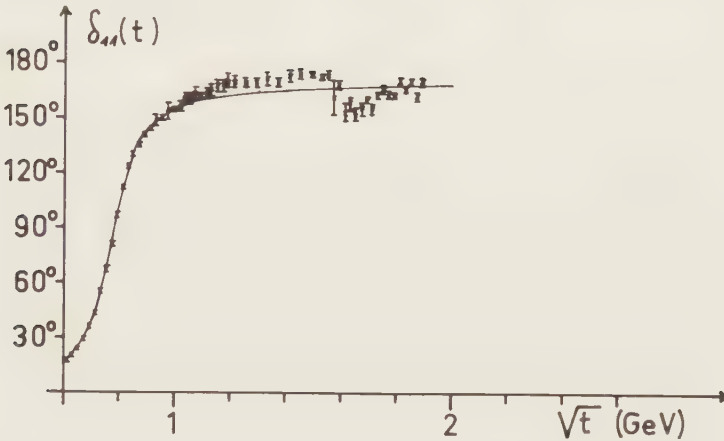


Fig. 10.3 Die Phase δ^{SB} im Vergleich zu δ_{11}

Mit diesen Parametern werden auch die Meßdaten von $|F_{\pi}(t)|$ für $t > 0$ recht gut wiedergegeben, wie aus Fig. 10.4 zu entnehmen ist.

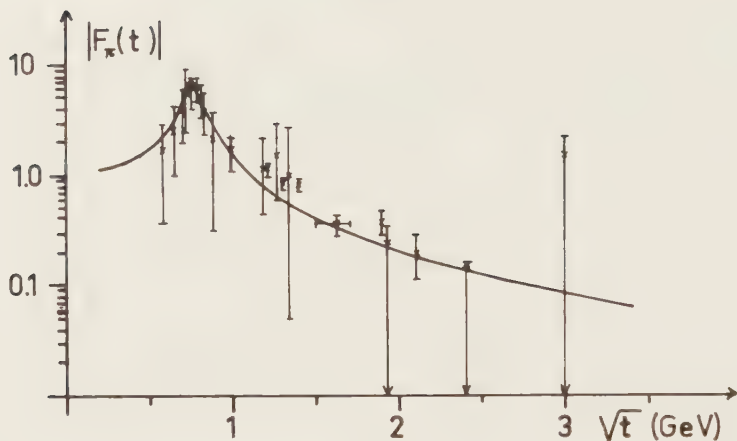


Fig. 10.4 $|F_{\pi}^{SB}|$ im Vergleich zum Experiment

Falls angenommen wird, daß unendlich viele Resonanzen bei der Streuphase bzw. FF-Phase auftreten, deren Phase kleiner als π ist, dann deuten die vorhandenen Daten darauf hin, daß der Exponent ν zwischen 0.89 und 0.98 liegt. Da die dominierende ρ -Resonanz berücksichtigt werden muß, wird die im SM vorhandene Abschneidemasse Λ in der Größenordnung der ρ -Masse angenommen. Die Resonanzbreite kann für große Energie-Impuls-Überträge vernachlässigt werden.

Entsprechend der obengenannten Interpretation, ist das SM eine Vereinfachung des RM-s mit unendlich vielen Resonanzen.

Verhält sich dagegen der Pion-FF so, daß er für große $|t|$ nicht mehr mit Hilfe eines RM-s beschrieben werden kann, dann könnte das sehr einfach konstruierte SM sich als nützlich erweisen.

11. DIE FF-MODELLE UND DIE PION-MASSENDIFFERENZ

Die Massendifferenz zwischen dem geladenen und dem neutralen Pion ist experimentell mit großer Genauigkeit gemessen worden; sie beträgt¹⁹

$$\delta m_{\text{exp}} = 4.6041(37) \text{ MeV} .$$

In Kap. 6 wurde gezeigt, daß die nicht-el. mag. Anteile zur Massendifferenz nur abgeschätzt werden können und daß deren Wert zwischen -0.02 und $+0.2$ MeV liegt. Somit ist der restliche el. mag. Anteil weit weniger bekannt als die gesamte Massendifferenz. Die Abschätzung ergibt

$$4.40 \leq \delta m_{\text{em}} \leq 4.62 \text{ MeV} . \quad (11.1)$$

Der elektrische Anteil der Massendifferenz wird durch Gl. (5.3) dargestellt.

Setzt man also eines der FF-Modelle in den Integranden von (5.3) ein, so muß bei richtiger Wahl des FF-s der Wert von δm_{em} (Gl. 11.1) wiedergegeben werden.

Im folgenden werden beide FF-Modelle (8.2) und (8.9) im Zusammenhang mit der Massendifferenz untersucht.

A) Das SM und die Massendifferenz

Setzt man den SM-FF in (5.3) ein, so sieht man, daß das Integral für alle $\nu > 1/2$ konvergieren wird.

Zur Berechnung spalten wir das Integral in zwei Teile auf

$$\delta m_{em}^S = \frac{\alpha}{\pi} 2m_\pi^2 (I_1^S - I_2^S) / (m_{\pi^+} + m_{\pi^0}) , \quad (11.2)$$

wobei

$$I_1^S = \int_0^{\infty} dz (1+z)^{3/2} z^{-1/2} (1+\beta z)^{-2\nu} \quad (11.3)$$

und
$$I_2^S = \int_0^{\infty} dz z (1+\beta z)^{-2\nu} ; \quad \beta = \frac{4m_\pi^2}{\Lambda^2} . \quad (11.4)$$

Mit Hilfe der Formel (7.6) bzw.

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} (1+x)^{\sigma} (1+\alpha x)^{\mu} dx = B(\lambda, -\mu-\sigma-\lambda) {}_2F_1(-\mu, \lambda; -\mu-\sigma; 1-\alpha) \quad (11.5)$$

und

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{(1+\beta x)^{\sigma}} = \beta^{-\mu} B(\mu, \sigma-\mu) \quad (11.6)$$

erhalten wir

$$\delta_{\text{em}}^{\text{S}} = \delta_{\text{em}}(\nu, \lambda) = \frac{\alpha}{\pi} m_{\pi} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, 2\nu-2\right) {}_2F_1\left(2\nu, \frac{1}{2}; 2\nu-\frac{3}{2}; 1-\beta\right) - \beta^{-2} B(2, 2\nu-2) \right\} \quad (11.7)$$

Dieser Ausdruck scheint zunächst für $\nu = 3/4$ und $\nu = 1$ singularär zu sein. Die Scheinsingularität bei $\nu = 3/4$ schaffen wir folgendermaßen weg. Es gilt

$$\lim_{r \rightarrow -n} \frac{{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; Z)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{(n+1)!} Z^{n+1} {}_2F_1(\alpha+n+1, \beta+n+1; n+2; Z) \quad (11.8)$$

und daher

$$\delta_{\text{em}}(3/4, \lambda) = \frac{\alpha m_{\pi}}{\pi} \left\{ \Gamma(1/2) \Gamma(-1/2) \frac{3(1-\beta)}{4} {}_2F_1\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}; 2; 1-\beta\right) - \beta^{-2} \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(1/2)} \right\}; \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (11.9)$$

Um die Scheinsingularität (infolge der Betafunktionen) für $\nu = 1$ zu eliminieren, entwickeln wir die hypergeometrische Funktion für $\nu = 1 + (1/2)\epsilon$.

Es ist

$${}_2F_1(2\nu, \frac{1}{2}; 2\nu - \frac{3}{2}; 1-\beta) = \beta^{-2} {}_2F_1(-\frac{3}{2}, 2\nu-2; 2\nu-\frac{3}{2}; 1-\beta) ,$$

außerdem gilt

$$\begin{aligned} B(\frac{1}{2}, \varepsilon) {}_2F_1(-\frac{3}{2}, \varepsilon; \frac{1}{2} + \varepsilon; 1-\beta) - B(2, \varepsilon) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \varepsilon)} - \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2 + \varepsilon)} \\ &+ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{3}{2})_n (\varepsilon)_n}{(\frac{1}{2} + \varepsilon)_n n!} (1-\beta)^n , \end{aligned} \quad (11.10)$$

so daß

$$\begin{aligned} \delta_{\text{em}}(1 + (1/2)\varepsilon, \lambda) &= \frac{\alpha m_{\pi}}{\pi \beta^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})_n \Gamma(\varepsilon+n)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \varepsilon + n) n!} (1-\beta)^n \right. \\ &\quad \left. + \Gamma(\varepsilon+1) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k)}{\Gamma(\frac{3}{2}+k+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(2+k)}{\Gamma(3+k+\varepsilon)} \right) \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\text{em}}(1 + (1/2)\varepsilon, \lambda) &= \delta_{\text{em}}(1, \lambda) = \frac{\alpha m_{\pi}}{\pi \beta^{\frac{1}{2}}} \left\{ [-Z - \ln(1-Z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(Z-3)\sqrt{Z} \ln \frac{1+\sqrt{Z}}{1-\sqrt{Z}}] + [1+2\ln 2] \right\}; \quad Z = 1-\beta \quad (11.11) \end{aligned}$$

In Fig. 11.1 ist die Massendifferenz $\delta m_{em}(\nu, \Lambda)$ als Funktion von ν bei verschiedenen Massen Λ aufgetragen.

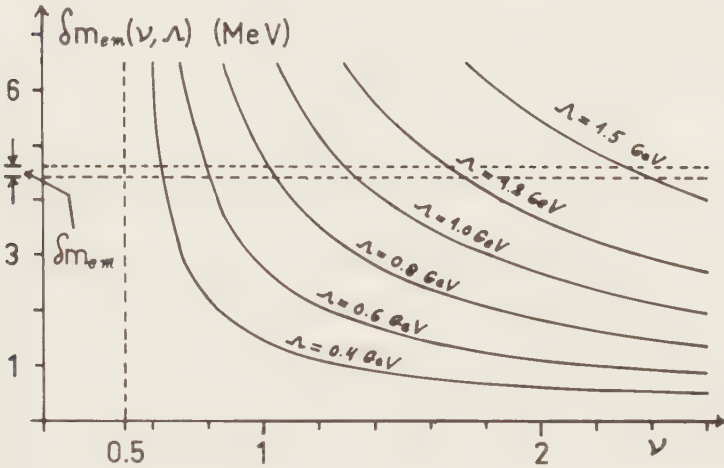


Fig. 11.1 $\delta m_{em}(\nu, \Lambda)$ als Funktion von ν

Für den Spezialfall $\Lambda = m_g = 0.777 \text{ GeV}$ (bzw. 0.7735 GeV) und $\nu = 1$ erhält man

$$\delta m_{em}(1, m_g) = 4.33 \text{ (bzw. } 4.30) \text{ MeV} \quad . \quad (11.12)$$

Dieser Wert ist also kleiner als δm_{em} (Gl. 11.1). Für ein entsprechendes $\nu < 1$ kann δm_{em} wiedergegeben werden. Das bestärkt die Annahme, daß das SM eine Pauschalierung von Resonanzen darstellen kann, wie im vorigen Kapitel postuliert wurde. Betrachten wir nämlich das SM als eine Pauschalierung von mehreren Resonanzen, so wird wegen der ϱ -Dominanz die Abschneide-

masse Λ gleich der φ -Mesonmasse gesetzt, d.h.

$$0.770 \leq \Lambda = m_{\varphi} \leq 0.778 \text{ GeV} \quad ,$$

und der Exponent ν wird so gewählt, daß die el. mag. Massendifferenz (11.1) wiedergegeben wird. Bei dieser Annahme ergibt sich also

$$\begin{aligned} \nu &\leq 0.993 \quad \text{für} \quad \delta_{m_{em}} \geq 4.40 \text{ MeV} \quad , \\ \nu &\geq 0.957 \quad \text{für} \quad \delta_{m_{em}} \leq 4.62 \text{ MeV} \quad . \end{aligned} \quad (11.13)$$

Aus Fig. 11.1 ist zu entnehmen, daß für jedes $\nu > 1/2$ ein passendes Λ gefunden werden kann, so daß $\delta_{m_{em}}$ wiedergegeben wird. Die Wahl eines Wertepaares (ν, Λ) wird daher nur im Zusammenhang mit experimentellen Daten des FF-s von Bedeutung sein.

Die vorhandenen π -e -Streumeßdaten (Fig. 10.2) werden am besten durch die Parameter

$$\nu = 0.75 \quad \text{und} \quad \Lambda = 0.545 \text{ GeV} \quad , \quad (11.14)$$

welche die Massendifferenz

$$\delta_{m_{em}}(0.75, 0.545) = 4.24 \text{ MeV} \quad (11.15)$$

ergeben, wiedergeben. Der entsprechende rms-Radius ist $r_{\pi}^S = 0.768 \text{ fm}$.

Die Parameterpaare (ν, Λ) , welche die Meßdaten in Fig. 10.1 besser als das SM mit den Parametern (11.14) anpassen, sind mit der Massendifferenz nicht verträglich. Für $\nu = 1.25$ und $\Lambda = 0.84 \text{ GeV}$ z.B. erhält man

für die Massendifferenz den Wert $\delta_{m_{em}}(1.25, 0.84) \approx 3.5 \text{ MeV}$, der offensichtlich zu klein ist.

Die Anpassung mit den Parametern (11.14) ergibt dagegen keine Übereinstimmung mit den Meßdaten im Erzeugungsbereich (δ_{11} und $|F_K|$). Außerdem wurde diese Anpassung durch Vergleich der Massendifferenz mit Meßdaten für kleine Energie-Impulsüberträge gewonnen. Da aber die el. mag. Massendifferenz des Pions ein Hochenergieeffekt ist (Kap. 7), sind gerade Meßdaten für große Energie-Impulsüberträge von besonderer Bedeutung.

Um das SM bestimmen zu können, sind also FF-Daten für große Energie-Impulsüberträge erforderlich.

B) Das RM und die Massendifferenz

Zur Berechnung der Massendifferenz (5.3) mit dem RM (8.9) können die Resonanzbreiten vernachlässigt werden. In den Integranden von (5.3) kann daher der Quadrat des FF-s

$$[F_{\pi}^R(t)]^2 \approx \sum_{j=1}^n \frac{A_j^2}{\left(1 - \frac{t}{m_j^2}\right)^2} + 2 \sum_{i < j} \frac{A_i A_j}{\left(1 - \frac{t}{m_i^2}\right)\left(1 - \frac{t}{m_j^2}\right)} \quad (11.16)$$

für $n = 1, 2, \dots$ eingesetzt werden.

Die Terme proportional zu A_j^2 liefern, wie aus dem vorigen Abschnitt zu entnehmen ist (Gl. 11.11), die Teilmassendifferenz

$$A_j^2 \delta_{em}^2(1, m_j) = A_j^2 U(m_j^2) = (m_{\pi^+} + m_{\pi^0}) T_{jj} \quad , \quad (11.17)$$

wobei

$$U(y) = \frac{\alpha}{2\pi} y \left\{ 1 + \frac{1}{\beta_y} \ln \frac{4}{\beta_y} - \frac{1}{\beta_y} \left(1 + \frac{\beta_y}{2} \right) \sqrt{1 - \beta_y} \right. \\ \left. \times \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \beta_y}}{1 - \sqrt{1 - \beta_y}} \right\} \quad (11.18)$$

mit $\beta_y = 4m_{\pi}^2/y$.

Zur Berechnung der Teilmassendifferenz, die den Termen $A_i A_j$ ($i \neq j$) proportional ist, kombinieren wir zunächst die Nenner gemäß der bekannten Feynman-Parametrisierung

$$\left[\left(1 - \frac{t}{m_i^2}\right) \left(1 - \frac{t}{m_j^2}\right) \right]^{-1} = m_i^2 m_j^2 \int_0^1 \frac{dx}{\Delta_{ij}^2 \left(1 - \frac{t}{\Delta_{ij}^2}\right)^2} \quad (11.19)$$

Hier ist

$$\Delta_{ij}^2 = x m_i^2 + (1-x) m_j^2 \quad (11.20)$$

Die Teilmassendifferenz, die zu $A_i A_j$ proportional ist, wird daher

$$(m_{\pi^+} + m_{\pi^0}) T_{ij} = 2 A_i A_j m_i^2 m_j^2 \int_0^1 dx \frac{U(\Delta_{ij}^2)}{\Delta_{ij}^2} \quad ; \quad i < j \quad (11.21)$$

sein.

Zur Berechnung von (11.21) ist es zweckmäßig,

$U(\Delta_{ij}^2)$ zu vereinfachen.

Für den Fall, daß $1 \gg 4 m_{\pi}^2 / y = \beta_y$, d.h. $y \gg 4 m_{\pi}^2$, kann man anstatt (11.18)

$$U(y) \simeq \frac{3\alpha}{4\pi} y \left\{ 1 + \frac{\beta_y}{8} - \frac{\beta_y}{4} \ln \frac{\beta_y}{4} + O(\beta_y^2) \right\} \quad (11.22)$$

setzen. Gilt daher für die Resonanzmassen $m_i^2, m_j^2 \gg 4 m_{\pi}^2$, so erhält man

$$\begin{aligned} T_{ij} = & \int_0^1 dx \frac{U(\Delta_{ij}^2)}{\Delta_{ij}^2} \simeq \frac{3\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{3}{2} \frac{m_{\pi}^2}{m_i^2 m_j^2} + \frac{1}{m_j^2 - m_i^2} \left\langle \ln \frac{m_j^2}{m_i^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{m_{\pi}^2}{m_i^2} \ln \frac{m_i^2}{m_{\pi}^2} - \frac{m_{\pi}^2}{m_j^2} \ln \frac{m_j^2}{m_{\pi}^2} \right\rangle \right\} \quad ; \quad m_i \neq m_j \quad (11.23) \end{aligned}$$

Da die kleinste Resonanzmasse höchstwahrscheinlich die ϱ -Masse m_ϱ sein wird, kann für alle $U(\Delta_{ij})$ (11.22) verwendet werden. Die resultierende Massendifferenz ist daher

$$\begin{aligned}\delta_{m_{em}}^R &= \delta_{m_{em}}(A_1, \dots, A_{n-1}; m_1, \dots, m_n) = \\ &= \sum_{j=1}^n T_{j,j} + \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1, \dots, n}} T'_{ij},\end{aligned}\quad (11.24)$$

wobei

$$T'_{ij} = \frac{2A_i A_j m_i^2 m_j^2}{m_{\pi^+} + m_{\pi^0}} I_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n+1} A_j = 1.$$

Wir wollen jetzt $\delta_{m_{em}}^R$ untersuchen, wenn eine bestimmte Anzahl von Resonanzen angenommen wird.

Bei Berücksichtigung von nur einer Resonanz ($A_1 = 1$) wird das RM identisch mit dem Spezialfall des SM-s, für den der Parameter $\nu = 1$ gesetzt ist.

Die el. mag. Massendifferenz (11.1) wird dann für alle Massen m_1 dieser Resonanz zwischen

$$0.784 \leq m_1 \leq 0.805 \text{ GeV}; \quad A_1 = 1 \quad (11.25)$$

wiedergegeben, wie aus Fig. 11.1 zu entnehmen ist.

Die Masse dieser einzigen Resonanz müßte also größer als die ϱ -Mesonmasse sein, da im Falle $m_1 = m_\varrho = 0.777$ (0.774) GeV

$$\delta_{m_{em}}^R = \delta_{m_{em}}(1; m_\varrho) = 4.33(4.30) \text{ MeV} < \delta_{m_{em}}. \quad (11.26)$$

Da die ϑ -Resonanz eindeutig gesichert ist, muß man annehmen, daß mehr als eine Resonanz in Betracht gezogen werden muß, um die el. mag. Massendifferenz mit dem RM wiedergeben zu können.

Setzen wir also die Masse der einen Resonanz gleich der ϑ -Masse d.h. $m_1 = m_\vartheta$ und betrachten den Einfluß einer zweiten Resonanz. Die zweite Resonanzmasse muß größer als m_ϑ sein (d.h. $m_2 > m_\vartheta$). Aus (11.26) ist zu entnehmen, daß der überwiegende Anteil zur Massendifferenz von der ϑ -Resonanz geliefert wird; d.h. $A_1 = A_\vartheta \gg A_2 = 1 - A_\vartheta$.

Setzen wir in das RM die Parameter (9.5) bzw.

$$\begin{aligned} A_\vartheta &= 0.993 & m_\vartheta &= 0.777 \text{ GeV} \\ A_2 &= A_{\vartheta_1} = 0.007 & m_{\vartheta_1} &= 1.68 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (11.27)$$

welche die δ_{ϑ_1} -Phase wiedergeben, so erhalten wir für diesen besonderen "Spezialfall"

$$\delta_{m_{em}}(A_\vartheta; m_\vartheta, m_{\vartheta_1}) = 4.38 \text{ MeV} \lesssim \delta_{m_{em}} \quad (11.28)$$

Für andere Werte von A_ϑ bzw. m_2 ist eine Übereinstimmung mit $\delta_{m_{em}}$ ohne Schwierigkeiten zu bekommen.

Als Beispiel nehmen wir an, daß $\delta_{m_{em}} = 4.6 \text{ MeV}$ sei. Dieser Wert kann durch $\delta_{m_{em}}^R$ bei folgender Wahl der Parameter wiedergegeben werden.

m_2 in GeV	A_1	
0.958	0.834	(0.851)
1.019	0.874	(0.887)
1.070	0.894	(0.906)
1.260	0.933	(0.940)
1.660	0.960	(0.9646)
1.680	0.961	(0.9653)

Tab. 11.1 $\delta_{m_{em}}^R = 4.6 \text{ MeV}$ für $m_\vartheta = 0.7735$ (0.777) MeV

Die Wertepaare A_1 und m_2 (Tab. 11.1) sind nicht geeignet, die Streuphase δ_{11} wiederzugeben insbesondere nicht die ϱ' -Resonanz.

Bei Mitnahme einer weiteren Resonanz ist es möglich, einerseits die Streuphase anzupassen und andererseits die el. mag. Massendifferenz wiederzugeben.

Mit den Parametern (9.6) erhält man für die Massendifferenz

$$\delta_{m_{em}}(A_g, A_{g'}; m_g, m_{g'}, m_3) = 4.42 \text{ MeV} \quad (11.29)$$

Dieser Wert ist offensichtlich mit (11.1) vereinbar.

Es sind auch weitere Möglichkeiten vorhanden, die g und g' -Resonanzen zu berücksichtigen und dabei auch die richtige Massendifferenz (11.1) zu erhalten.

In Tab. 11.2 sind einige Beispiele für die resultierenden Resonanzenmassen bei verschiedenen A_1 aufgetragen, falls angenommen wird, daß

$$\delta_{m_{em}}^R \simeq 4.6 \text{ MeV} \quad A_{g'} = 0.007$$

$$m_g = 0.777 \text{ GeV} \quad m_{g'} = 1.68 \text{ GeV}$$

$$\text{und} \quad m_3 \gtrsim m_g \quad (11.30)$$

ist.

A_1	m_3 in GeV	A_1	m_3
0.13	0.80	0.78	0.86
0.49	0.82	0.82	0.90
0.65	0.84	0.87	0.95
0.73	0.86	0.90	1.01 ± 0.01

Tab. 11.2 $\delta_{m_{em}}^R \simeq 4.6 \text{ MeV}$ mit den Parametern (11.30)

Bei dieser Wahl der Parameter (ebenso für den Fall $\delta_{m_{em}}^R = 4.5 \text{ MeV}$) können die δ_{11} -Meßdaten weit weniger genau als mit den Parametern (9.6) angepaßt werden.

Es hat sich also gezeigt, daß um die el. mag. Massendifferenz $\delta_{m_{em}}$ (Gl. 11.1) und die FF- Meßdaten gleichzeitig wiedergeben zu können, im RM mindestens drei Resonanzen vorhanden sein müssen. Da die δ_{11} -Streuphasendaten am besten mit den Parametern (9.6) angepaßt werden, ist das RM mit diesen Parametern als das realistischste zu betrachten.

C) Die Massendifferenz und das asymptotische Verhalten des FF-s

In Abschnitt 11.A wurde gezeigt, daß das SM mit dem Exponenten $\nu = \nu_{\text{exp}} = 0.96$ und der Abschneidemasse $\Lambda = m_g$ auf die el. mag. Massendifferenz $\delta_{\text{em}}(\nu_{\text{exp}}, m_g) = 4.6 \text{ MeV}$ führt. Dabei stellte sich heraus, daß das SM für $\nu \lesssim 1$ den Einfluß der diversen Resonanzen pauschal berücksichtigt, wobei diese über den gesamten Erzeugungsbereich verteilt liegen.

Nimmt man dagegen an, daß die Reihe der auftretenden Resonanzen bei einer maximalen Resonanz M endet, so muß das SM zur Beschreibung dieses Sachverhaltes modifiziert werden. Die Phase der Modellfunktion darf dann nur im Bereich der Resonanzen $< \pi$ gewählt werden, während sie oberhalb $t = M^2$ rasch den Wert π annehmen muß. In folgender Skizze ist das Verhalten der FF-Phase durch eine Stufenfunktion grob vereinfacht wiedergegeben.

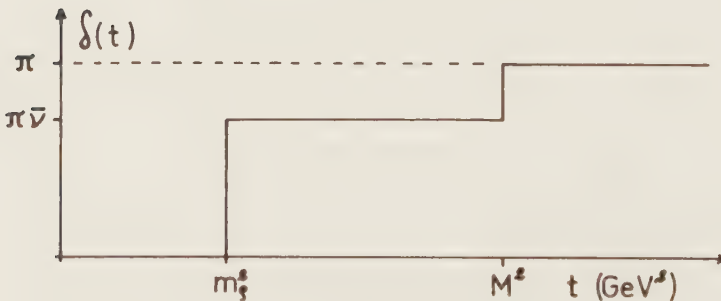


Fig. 11.2 Die Phase des Doppelschnittmodells^{*)} F_{π}^D

*) Das modifizierte SM bezeichnen wir seiner analytischen Eigenschaften wegen als "Doppelschnittmodell".

Mathematisch wird die Phase in Fig. 11.2 durch folgende Funktion dargestellt

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < m_g^2 \\ \pi \bar{\nu} & \text{für } m_g^2 \leq t < M^2 \\ \pi(\bar{\nu} + \eta) = \pi & \text{für } M^2 \leq t < \infty \end{cases} \quad (11.31)$$

Berechnen wir das Omnés Integral (2.10) mit dieser Phase, so erhalten wir das FF-Modell

$$F_{\pi}^D(-t) = (1 + t/m_g^2)^{-\bar{\nu}} (1 + t/M^2)^{-\eta} \quad (11.32)$$

Die aus diesem Modell resultierende Massendifferenz $\delta m(\bar{\nu}, \eta, M)$ erhalten wir, indem wir (11.32) in (5.3) einsetzen und in gleicher Weise wie δm_T^2 in Kap. 7 die Berechnung des Integrals ausführen. Man erhält

$$\delta m^2(\bar{\nu}, \eta, M) = \frac{2\alpha}{\pi} m_{\pi}^2 \left\{ B\left(\frac{1}{2}, 2\bar{\nu} + 2\eta - 2\right) F_1\left(\frac{1}{2}, 2\bar{\nu}, 2\eta, -\frac{3}{2} + 2\bar{\nu} + 2\eta; \right. \right. \\ \left. \left. ; 1 - \beta, 1 - \sigma\right) - \beta^{-2} B(2, 2\bar{\nu} + 2\eta - 2)_2 F_1(2\eta, 2; 2\bar{\nu} + 2\eta; 1 - \frac{\sigma}{\beta}) \right\} \quad (11.33)$$

oder, nach einer Transformation von ${}_2F_1$ und F_1

$$\delta m^2(\bar{\nu}, \eta, M) = \frac{2\alpha}{\pi} m_{\pi}^2 \frac{\sigma^{2\bar{\nu}-2}}{\beta^{2\bar{\nu}}} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, 2\bar{\nu} + 2\eta - 2\right) F_1(2\bar{\nu} + 2\eta - 1, 2\bar{\nu}, -\frac{3}{2}, \right. \\ \left. , -\frac{3}{2} + 2\bar{\nu} + 2\eta; 1 - \frac{\sigma}{\beta}, 1 - \sigma) - B(2, 2\bar{\nu} + 2\eta - 2) \right. \\ \left. \times {}_2F_1(2\bar{\nu} + 2\eta - 1, 2\bar{\nu}; 2\bar{\nu} + 2\eta; 1 - \frac{\sigma}{\beta}) \right\} \quad (11.34)$$

Hier ist

$$\zeta = 4 \left(\frac{m_\pi}{M} \right)^2, \quad \beta = 4 \left(\frac{m_\pi}{m_s} \right)^2, \quad \frac{\zeta}{\beta} = \left(\frac{m_s}{M} \right)^2. \quad (11.35)$$

Wir sind hauptsächlich daran interessiert, diese Gleichung für den Fall $\bar{\nu} + \eta = 1$ auszuwerten. In diesem Grenzfall müssen sich beide divergenten Terme in (11.34) kompensieren. Durch Reihenentwicklung und anschließende Grenzbildung $\eta \rightarrow 1 - \bar{\nu}$ erhält man die Reihe

$$\begin{aligned} \delta_m^2(\bar{\nu}, 1 - \bar{\nu}, M) &= \frac{2\alpha}{\pi} m_\pi^2 \frac{\zeta^{1-\bar{\nu}}}{\beta^{1-\bar{\nu}}} \left\{ 1 + 2 \ln 2 + \right. \\ &\bar{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\bar{\nu}+1)_m}{1+m} \left\langle \frac{4}{3} \frac{1}{(\frac{3}{2})_m} - \frac{1}{(3)_m} \right\rangle \left(1 - \frac{\zeta}{\beta}\right)^{1+m} - \\ &\left. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_{m+n} (2\bar{\nu})_m}{(\frac{3}{2})_{m+n} m!} \left(1 - \frac{\zeta}{\beta}\right)^m \frac{(-\frac{1}{2})_n}{(1+n)!} (1-\zeta)^{1+n} \right\}, \quad (11.36) \end{aligned}$$

welche numerisch untersucht werden kann.

Für $M = m_s$ hat der Ausdruck $\delta_m^2(\bar{\nu}, 1 - \bar{\nu}, M) / (m_{\pi^+} + m_{\pi^0})$ den Wert von Gl. (11.12). Mit wachsendem M steigt der Wert dieser Massendifferenz, bis er bei $M = \infty$ den Wert, der durch Gl. (11.7) dargestellt wird, erreicht. Dieses Verhalten ist in Fig. 11.3 für einige Werte von $\bar{\nu}$ illustriert.

Die numerische Identifikation

$$\delta_m(\bar{\nu}, 1 - \bar{\nu}, M_{\bar{\nu}}) = \delta_{m_{em}} \quad ; \quad m_s = 0.7735 \text{ GeV} \quad (11.37)$$

bewirkt eine Relation zwischen $\bar{\nu}$ und der Massengrenze $M_{\bar{\nu}} = M(\delta_{m_{em}})$.

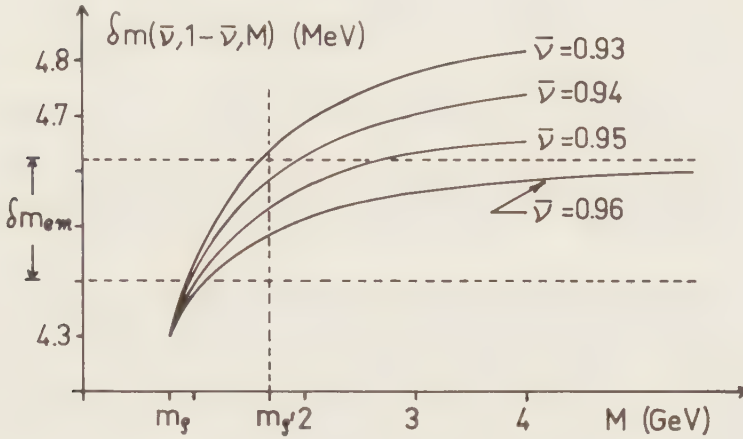


Fig. 11.3 Das Verhalten der Massendifferenz in Abhängigkeit von F_π^D für verschiedene $\bar{\nu}$

Es wurde davon ausgegangen, daß M größer als alle bekannten Resonanzen, die den FF beeinflussen, ist. Das heißt

$$m_\rho \leq M < \infty \quad , \quad (11.38)$$

Diese Bedingung beschränkt den Exponenten zusammen mit (11.37) auf

$$0.936 \leq \bar{\nu} \leq 0.964 \quad , \quad (11.39)$$

falls $\delta_{m_{em}} = 4.6$ MeV angenommen wird.

Wenn also $\bar{\nu}$ bekannt ist, kann die Grenze $M_{\bar{\nu}}$ des Resonanzenbereiches bestimmt werden.

Falls z.B. $\bar{\nu} = \nu_{\text{exp}} = 0.960$ und $\delta_{\text{m}_{\text{em}}} = 4.6$ MeV ist, erhält man für die Grenze des Resonanzenbereiches

$M_{0.960}(\delta_{\text{m}_{\text{em}}} = 4.6 \text{ MeV}) = 5.5 \text{ GeV}$. Das könnte als Hinweis für die Existenz weiterer Resonanzen dienen.

Nimmt man dagegen an, daß $\delta_{\text{m}_{\text{em}}} = 4.5$ MeV (und $\bar{\nu} = 0.960$) ist, dann erhält man $M_{0.960}(\delta_{\text{m}_{\text{em}}} = 4.5 \text{ MeV}) = 1.9 \text{ GeV}$.

Dies würde die Existenz weiterer Resonanzen oberhalb der g' -Resonanz als nicht wahrscheinlich erscheinen lassen.

Bei dieser Betrachtung hat man allerdings auch die Empfindlichkeit von $M_{\bar{\nu}}$ gegenüber geringfügigen Änderungen von $\bar{\nu}$ zu beachten. Liegt z.B. $\bar{\nu}$ im Bereich $0.95 \leq \bar{\nu} \leq 0.96$, so schwankt $M_{\bar{\nu}}$ im Bereich $2.7 \leq M_{\bar{\nu}} \leq 5.5 \text{ GeV}$ falls $\delta_{\text{m}_{\text{em}}} = 4.6$ MeV angenommen wird.

Leider ermöglichen die vorhandenen Daten von δ_{11} noch keine genügend präzise Bestimmung von $\bar{\nu}$, mit welcher eine verlässlichere Information über M erhalten werden kann.

12. ZUSAMMENFASSUNG

Die systematische Untersuchung des Pion-FF-s hat gezeigt, daß folgende Aspekte durch jedes FF-Modell wiedergegeben werden müssen:

- 1.) Die analytischen bzw. physikalischen Eigenschaften von F_π
- 2.) Die $\pi\pi$ -Resonanzen im Erzeugungsbereich $t > 4m_\pi^2$
- 3.) Die Ladungsausbreitung des Pions, d.h. der rms-Radius r_π
- 4.) Die el. mag. Pion-Massendifferenz, die eine Integralgleichung für F_π liefert.

Bei Beachtung dieser vier Punkte konnten zwei einfache Modelle gefunden werden:

A) Das Resonanzenmodell (8.9)

$$F_\pi^R(t) = \sum_{j=1}^3 \frac{A_j \left(1 + \frac{2m_\pi \Gamma_j}{m_j^2}\right)}{1 - \frac{t}{m_j^2} - i \frac{\Gamma_j}{m_j^2} \sqrt{t - 4m_\pi^2}}$$

mit den Parametern (9.6)

$$\begin{array}{lll} m_1 = 0.775 \text{ GeV} & \Gamma_1 = 0.150 \text{ GeV} & A_1 = 0.96 \\ m_2 = 0.950 \text{ GeV} & \Gamma_2 = 0.150 \text{ GeV} & A_2 = 0.033 \\ m_3 = 1.680 \text{ GeV} & \Gamma_3 = 0.095 \text{ GeV} & A_3 = 0.007 \end{array} ,$$

das alle vorhandenen FF-Meßdaten außer für $-t > 1.2 \text{ GeV}^2$ wiedergibt.

B) Das Schnittmodell-mit-Breite (10.3)

$$F_{\pi}^{SB}(t) = \left[\frac{1 + \frac{2m_{\pi}\Gamma}{\Lambda^2}}{1 - \frac{t}{\Lambda^2} - i \frac{\Gamma}{\Lambda^2} \sqrt{t - 4m_{\pi}^2}} \right]^{\nu}$$

mit den Parametern (10.5)

$$\nu = 0.96 \quad \Lambda = m_{\rho} = 0.773 \text{ GeV} \quad \Gamma = \Gamma_{\rho} = 0.14 \text{ GeV} ,$$

das als Pauschalierung von unendlich vielen $\pi\pi$ - Resonanzen interpretiert wurde und sich besonders zur Betrachtung des asymptotischen Verhaltens des FF-s eignet.

Zur Untersuchung der Zusammenhänge zwischen dem Pion-FF und der el. mag. Massendifferenz wurde die Pion-Massendifferenz eingehend untersucht, um den el. mag. Anteil bestimmen zu können. Es zeigte sich, daß die hadronischen Beiträge beachtlich sein können; sie liegen zwischen $-0.02 \lesssim \delta_{\text{had}} \lesssim 0.2 \text{ MeV}$. Da der el. mag. Anteil ($4.40 \lesssim \delta_{\text{em}} \lesssim 4.62 \text{ MeV}$) ein Hochenergieeffekt ist, können Aussagen über das asymptotische Verhalten des FF-s gemacht werden, da die Massendifferenz eine Integralgleichung für F_{π} liefert. Dazu wurde ein weiteres, modifiziertes SM konstruiert, das nur endlich viele Resonanzen pauschaliert und von einer bestimmten maximalen Masse an eine konstante Phase $\delta = \pi$ aufweist. Daher bräuchte man den FF, um ihn in allen Energie-Impuls-Bereichen zu kennen, nicht in allen Bereichen zu messen, sondern nur bis zu einer maximalen Masse M .

Bei Kenntnis der FF-Phase bis zu einem bestimmten Energie-Impulsübertrag ist es mit Hilfe des modifizierten SM-s möglich, auszusagen, ob bei höheren Werten von t noch Resonanzen zu erwarten sind.

Da anzunehmen ist, daß sich die $\pi\pi$ -Streuphase im Zustand $I = T = 1$ für $t > 16 m_\pi^2$ nur wenig von der FF-Phase unterscheiden wird, könnte man aus den δ_{11} -Meßdaten wichtige Information über den FF gewinnen. Die zuverlässigste Information über den Pion-FF erhielte man natürlich durch direkte FF-Messungen, wie $e\pi$ -Streuung oder $\pi\pi$ -Streuung. Solange aber diese direkten Messungen für große Energie-Impulsüberträge nicht möglich sind, ist die Phasenmessung wegen ihrer Genauigkeit am ergiebigsten.

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Salecker, Z.f. Naturforschung 15a, 1023 (1960)
- 2 H. Salecker, Z.f. Physik 164, 463 (1961)
- 3 N.J. Muskhelishvili, "Sing. Int. Equations",
Groningen (1953);
R. Omnès, Nuovo Cim. 8, 316 (1958)
- 5 P. Shephard, report presented at the 1972 meeting
of Am. Phys. Soc. (unpublished)
- 6 C.W. Akerlof et al., Phys. Rev. 163, 1482 (1967);
C. Mistretta et al., Phys. Rev. 184, 1487 (1969);
C.N. Brown et al., Phys. Rev. Let. 26, 991 (1971);
C. Driver et al., Phys. Let. 35B, 77 (1971);
P.S. Kummer et al., Nucl. Phys. B42, 369 (1973);
C.N. Brown et al., Phys.Rev. D8, 92 (1973);
C.J. Bebek et al., Phys. Rev. D9, 1229 (1974);
- 7 G.F. Chew and F.E. Low, Phys.Rev. 113, 1640 (1959)
- 8 J.L. Petersen, Phys. Reports 2, 115 (1971)
- 9 S.D. Protopopescu et al., Phys. Rev. D7, 1279 (1973)
- 10 B. Hyams et al., MPI-PAE/exp. E128 (1973);
W. Ochs, Diss. München (1973)
- 11 V. Auslander et al., Phys. Let. 25B, 433 (1967);
J. Ausgustin et al., Phys. Rev. Let. 20, 126 (1968);
V.L. Auslander et al., Sov. J. Nucl. Phys. 9, 69 (1969);
G. Salvini, "Particles and Fields", A.I.P. N.York (1971);
V.E. Balakin et al., Phys. Let. 34B, 328 (1971);
V.E. Balakin et al., Phys. Let. 41B, 205 (1972);
J. Lefrançois, Proc. 1971 Int. Symp. on Electron
and Photon Interactions at High Energies, Cornell
Univ., 52 (1972);
V. Alles-Borelli et al., Phys. Let. 40B, 433 (1972);
D. Benakas et al., Phys. Let. 39B, 289 (1972);
M. Bernardini et al., Phys. Let. 46B, 261 (1973)

- 13 R.P. Feynman and G. Speisman, Phys. Rev. 94, 50 (1954)
14 A. Petermann, Helv. Phys. Acta 27, 441 (1954)
15 Riazuddin, Phys. Rev. 114, 1184 (1959)
16 V. Barger and E. Kazes, Nuovo Cim. 28, 385 (1963)
17 J.M. Jauch and F. Rohrlich, "The Theorie of Photons
and Electrons", Adison-Wesley (1959)
18 H. Salecker, private Mitteilung
19 Particle Data Group, Phys. Let. 50B, No 1 (1974)
20 D.B. Lichtenberg, "Unitary Symmetry and Elementary
Particles", Academic Press, N.York and London 1970
21 H. Pilkun in Landolt-Börnstein, "Numeric Data and
Function Relationships", V6, Springer Verlag,
Berlin 1972, p1
22 H. Katsumori, Prog.Theor. Phys. 24, 35 (1960)
23 J.H. Wojtaszek, R.E. Marshak and Riazuddin,
Phys. Rev. 136, 1053 (1964)
24 R.H. Socolow, Phys. Rev. 137, 1221 (1965)
25 Adylov et al., Phys. Let. 51B, 402 (1974)
26 Volkov, M.K., V.N. Pervushin, Phys. Let. 51B, 356 (1974);
C.F. Cho and J.J. Sakurai, Let. al Nuovo Cim. 2, 7 (1971)
27 S. Okubo and B. Sakita, Phys. Rev. Let. 11, 50 (1963)
29 J.D. Bjorken and D. Drell, "Relativistische QFT",
BI 100/101*, 287 (1967)
30 T. Anders, private Mitteilung
31 G. Barbarino et al., Let. al Nuovo Cim. 3, 689 (1972);
A. Bramòn and M. Greco, Let. al Nuovo Cim. 3, 693 (1972)
32 S. Dubnička and O.V. Dumbrajs, Phys. Let. 53B, 285 (1974)

DANKSAGUNG

Ich danke Herrn Prof. Dr. H. Salecker
herzlich für die Stellung des Themas und für
sein Entgegenkommen in der Schaffung der
Arbeitsbedingungen. Außerdem danke ich ihm
und Herrn Dr. T. Anders für die wertvollen
und klärenden Gespräche, sowie für die sprach-
liche Hilfestellung.

LEBENS LAUF

Dan Baruth, geb. 1.5.1944 in Haifa/Israel

Eltern: Adolf Eliezer Baruth

Erna Baruth, geb. Gassmann

Schulen: Amami/Bat-Galim 1950-1957

Kibbuz Beit-Hashita 1957-1958

Gymnasium Even-Pina 1958-1962

Militärdienst 1962-1965

Abitur 21.4.1967

Studium: Universität München WS 1967/68

Verheiratet seit 25.9.1968

Vordiplom 27.1.1970

Diplom 29.11.1972

Hilfskraft an der Universität

München, Sektion Physik, bei

Prof. Dr. H. Salecker 1.1.1973

Verwalter der Dienstgeschäfte

eines wissenschaftlichen

Assistenten ebd. seit 1.4.1973

